MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT ESSEN
2001

Konstruktivistisches **L**ernen an **I**ntentionalen **P**roblemen -
Theoretische und empirische Studie zu den Auswirkungen konstruktivistischer, computerorientierter Lernarrangements im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auf die Begriffsbildung und das Problemlöseverhalten

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Dr. rer. nat.
am Fachbereich für Mathematik und Informatik
der Universität Essen

vorgelegt von
STEPHAN HUßMANN

Prüfungsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. Hans Niels Jahnke
Gutachter: Prof. Dr. Norbert Knoche
Gutachter: Prof. Dr. Harald Scheid

Tag der mündlichen Prüfung: 19.12.20001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

WITTENBERG (1963) hat gesagt, dass Mathematik ein „Denken in Begriffen“ ist. Die Menschen, die diese Begriffe hervorbringen, kann man Mathematikerinnen[1] nennen. Die Weise, wie sie die Begriffe erlangen, kann man als *Entdecken* oder als *Erfinden* bezeichnen. Eine Konstruktivistin, so HEINZ VON FOERSTER, könne man daran erkennen, ob sie Begriffe als Erfindungen oder als Entdeckungen bezeichnet (VON FOERSTER 1992). Glaubt man den Geschichten, die man in seiner Kindheit erzählt bekommt, kann es nicht mehr viele solcher Konstruktivistinnen geben.

In der Geschichte „Der Erfinder“ beschreibt PETER BICHSEL (1974) die Situation eines Mannes, den er einen der letzten Erfinder nennt. Er schreibt: „Erfinder ist ein Beruf, den man nicht lernen kann; deshalb ist er selten“ (ebd., S. 44). Einer dieser Erfinder lebte allein und zurückgezogen, weit weg von der nächsten Stadt und damit in keinem Kontakt zu irgendeinem Menschen. Seinen Tag verbrachte er damit, dass er an seinem Schreibtisch saß und zeichnete und berechnete und ergebnislos erfand. Da er so mit der Suche nach einer Erfindung beschäftigt war, las er keine Zeitungen und bekam keine Post. Nach vierzig Jahren dieser Tage gelang es ihm eine Erfindung zu erfinden. Er rollte seine Pläne zusammen und ging in die nächste Stadt. Diese hatte sich aber völlig verändert. Statt Pferden gab es Autos, die Dampfeisenbahnen fuhren mittlerweile unter der Stadt und hießen U-Bahnen. Es gab Ampeln, nach denen sich alle richteten. „Aber weil er ein Erfinder war, begriff er alles sehr schnell“ (ebd., S. 47). Er verstand sofort, dass ein Telefon ein Telefon ist und dass man bei Rot stehen bleiben muss und bei Grün gehen darf. Da er so stolz war, eine Erfindung erfunden zu haben, und an nichts anderes mehr denken konnte, sprach er alle Menschen an, die ihm begegneten, um ihnen von seiner Erfindung zu erzählen. Die meisten Menschen sagten jedoch nichts oder lachten nur oder gingen weiter, als hätten sie nicht gehört. Weil der Erfinder so lange allein gelebt hatte, war er nicht mehr in der Lage, die Menschen in angemessener Form anzusprechen. Er platzte immer mit dem Satz heraus: »Sie, ich habe eine Erfindung gemacht«, und packte seine Zeichnungen aus. Die Leute taten so, als sei nichts geschehen, gingen bei Grün oder blieben bei Rot stehen. Der Erfinder rief: »Schaut doch, ich habe etwas erfunden. Sie können damit sehen, was weit weg geschieht«. Die Leute lachten und sagten: »Der hat das Fernsehen erfunden«. Der Erfinder verstand nicht, warum die Leute lachten, bis ihm einer erklärte, dass es das Fernsehen schon lange gibt. Daraufhin stand er wütend auf, ließ seine Pläne liegen und kam nie wieder in die Stadt. Zu Hause setzte er sich an seinen Schreibtisch und erfand das Auto noch einmal. Dann erfand er alles, was er gesehen hatte, noch einmal. So blieb er sein Leben lang Erfinder, „denn auch Sachen, die es gibt, zu erfinden, ist schwer, und nur Erfinder können es“ (ebd., S. 52).

Überträgt man die Situation auf die Schule, so werden vermutlich die meisten Schülerinnen und wohlmöglich auch viele Lehrerinnen behaupten, sie seien keine Erfinderinnen. Befragt man die Mathematikerinnen, wird sich diese Situation vollkommen anders darstellen. Denn, so werden sie sagen, Erfinden ist ein essentieller Bestandteil von Mathematik.

Wieso können die Mathematikerinnen erfinden und die Schülerinnen nicht? Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit man Mathematik erfinden kann. Benötigt man dafür besondere Fähigkeiten? Muss man erst einmal alles schon *bekannte* wissen, damit man etwas *neues* erfinden kann? Und wie kann man Spaß an einem Fach gewinnen, wenn man

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird, soweit es aus dem Gesamtzusammenhang nicht anders hervorgeht, nur die weibliche Form verwendet. Sie gilt dann entsprechend für das männliche und das weibliche Geschlecht. Da im dritten Teil dieser Arbeit geschlechtsspezifische Unterscheidungen vorgenommen werden, werden dort beide Formen verwendet.

den essentiellen Bestandteil nicht vermittelt bekommt, oder besser, nicht selber durchführen darf?

BICHSEL schlägt vor, dass man auch Dinge erfinden kann, die es schon gibt. Dies ist keine leichte Aufgabe und kann nur von Erfinderinnen bewältigt werden. Aber Erfinderin ist ein Beruf, laut BICHSEL, den man nicht erlernen kann.

An dieser Stelle möchte ich BICHSEL widersprechen und damit zum zentralen Anliegen dieser Arbeit kommen. Erfinden ist erlernbar. Mathematik erfinden ist erlernbar, natürlich vorausgesetzt, dass man Interesse am Erfinden hat. Ich glaube sogar, Mathematik ist gar nicht begreifbar und erlebbar, wenn man sie nicht erst erfindet.

Hinsichtlich der in der Schule zu erfindenden Mathematik sprechen wir von einem Bereich, der für die Mathematikerinnen und die Lehrerinnen schon ein heimisches Gebiet darstellt. Für die Schülerinnen ist dies anders. Sie bewegen sich auf neuem Terrain. Wir können, wie die Menschen in BICHSELS Geschichte, den Schülerinnen Regeln an die Hand geben und Ampeln aufstellen, damit sie wissen, wie sie sich *richtig* fortzubewegen haben. Das ist wichtig, zweifellos, auch für das Gebiet der Mathematik. Aber mit vorgegebenen Ampeln, die einem genau sagen, *wann* man anzuhalten und *wann* man zu gehen hat, lernt man nicht das *warum* man anzuhalten und *warum* man zu gehen hat. So hat man zwar Sicherheit in der Regelmäßigkeit, aber auf diese Weise, so sagt BICHSEL, verlieren wir alle Erfinderinnen, da jede nur noch Teil eines übergeordneten, unreflektierten Prozesses wird und das *warum* der Erfindungen nicht mehr versteht. Und man kann schneller verstehen, wenn man das warum von Erfindungen versteht.

Legt man WITTENBERGS Verständnis von Mathematik zu Grunde, dass Mathematik ein Denken in Begriffen ist, und geht man davon aus, dass Mathematikunterricht in der Schule diese Mathematik den Schülerinnen näher bringen möchte, so muss man den Schülerinnen die Gelegenheit geben, mathematische Begriffe selbst zu erfinden.

Das „Erfinden“ darf jedoch nicht mit dem „Entdecken“ verwechselt werden. Unter Entdecken versteht man üblicherweise das Nachvollziehen eines Prozesses, den andere schon abgeschlossen haben. Für den Kontext der Schule bedeutet das, dass der Stoff, der entdeckt werden soll, üblicherweise in einer für die Schülerinnen „mundgerechten“ Form von der Lehrerin dargeboten wird. Beim Erfinden dagegen ist das Ergebnis und der Weg dahin nicht vorbestimmt. Man ist motiviert, sich mit einem Problem, oder allgemeiner, mit einem Sachverhalt auseinander zu setzen. Man studiert die Eigenschaften des Problems und entwickelt Verfahren dasselbe zu lösen. Im Mathematikunterricht können diese Verfahren auch Begriffe sein. Die Notwendigkeit ein Verfahren oder einen Begriff häufiger zu verwenden, führt normalerweise zur Theoriebildung. Mathematische Theoriebildung wäre somit ein Erfinden von Begriffen.

Befragt man die Schülerinnen nach ihrem Verständnis von Mathematik, so erfährt man, dass sie den Mathematikunterricht oft als Formelgebäude erleben, das vielfach Bezüge zu individuellen Erfahrungen oder eigenen Handlungen vermissen lässt. So erscheint Mathematik den meisten Schülerinnen als ein Anwenden von Rezepten auf weitgehend realitätsferne Aufgaben[2]. „Dazu kommt, dass die Mathematiker [*in unserem Fall die Lehrerinnen, Anm. von S.H.*] nicht nur, wie andere Wissenschaftler über eine eigentümliche Fachsprache, sondern auch über eine Notation verfügen, die sich von der gewohnten Schrift unterscheidet und die für ihre Binnenkommunikation unentbehrlich ist. [...] Nun geraten aber die meisten Menschen, kaum dass sie einer Formel ansichtig werden, in Panik. Schwer zu sa-

[2] Die TIMS-Studie zeigt entsprechend Defizite bei Schülerinnen beim Modellieren von realitätsnahen aber auch innermathematischen Problemstellungen (vgl. z.B. BAUMERT, 1997, BLUM & NEUBRAND, 1998).

gen, woher dieser Fluchtreflex rührt, der wiederum den Mathematikern unbegreiflich ist" (ENZENSBERGER, 1998).

Auf Seiten vieler betroffener Lehrerinnen wird die mangelnde Bereitschaft der Schülerinnen beklagt sich intensiv und nachhaltig mit Mathematik auseinander zu setzen. So wird zwar für die anstehende Klassenarbeit oder Klausur intensiv gelernt, zwei Wochen später jedoch ist alles wieder vergessen. Ursachen für diesen Missstand können viele gefunden werden: der institutionelle Rahmen, der durch enge Curricula, der Fixierung auf Leistungsbewertung, der Isolierung der einzelnen Fächer und dem 45-Minuten-Takt des Stundenplans, eine freie, die Schülerinnen ergreifende Unterrichtsgestaltung sehr erschwert; der Wandel der kindlichen Lebenswelt, der dazu führt, dass den Schülerinnen durch den starken Einfluss neuer Medien primäre Erfahrungen vorenthalten werden und die Erfassung der Wirklichkeit immer handlungsärmer wird. Darüber hinaus werden fehlende Vorkenntnisse und eine schlechte Allgemeinbildung auf Seiten der Schülerinnen kritisiert, die eine Behandlung komplexer, fächerübergreifender und realitätsnaher Problemstellungen im Unterricht verhindern.

Sicher lassen sich weitere ähnlich gelagerte Gründe finden, doch nur wenige dieser Faktoren lassen sich in Kürze von der einzelnen Lehrerin verändern. Eine Veränderung muss tiefer greifen, sie muss an der didaktischen Konzeption des Unterrichts ansetzen. Diese Konzeption zeigt sich in der konkreten Unterrichtsrealität vielfach in einem weitgehend lehrerinnenzentrierten Unterricht, in dem die Lehrerin auf Grundlage der vorgeschriebenen Inhalte diese im zumeist fragend-entwickelnden Unterrichtsstil an die Schülerinnen in kleinen „verdaubaren" Stücken weitergibt. Dieser Weg „vom Stoff in die Schülerin" verläuft über eine strenge Sequenzierung, deren Unüberschaubarkeit durch die nicht enden wollenden Ketten neuer mathematischer Aufgaben und Lösungsrezepte die Schülerin mehr erdrückt, als ihr ein Verständnis für die Mathematik eröffnet. Ferner erzeugt die Erarbeitung von Wissensinhalten ohne Blick auf die Verwendbarkeit und Nützlichkeit lediglich zu „trägem" Wissen, d.i. ein Wissen, welches innerhalb eines engen zeitlichen und inhaltlichen Rahmens, z.B. zu Prüfungszwecken, nützlich, in Anwendungssituationen jedoch nicht zu mobilisieren ist.

Es stellt sich die Frage, ob diese Perspektive der Unterrichtsplanung und -durchführung nicht zu Gunsten einer Perspektive der Schülerinnen modifiziert werden sollte: Ein Unterricht, der die Interessen der Lernenden in den Mittelpunkt stellt und ihnen Gelegenheit gibt, ihren Lernprozess selbsttätig zu organisieren und Mathematik in relevanten Anwendungssituationen zu erfinden. Damit wären die Schülerinnen die Erfinderinnen mathematischer Begriffe, die sie auf Grundlage für sie interessanter Problemstellungen entwickeln.

Der Erfinder in BICHSELS Geschichte erhält nicht die Möglichkeit im sozialen Kontext und in Anerkennung seiner individuellen Leistungen zu erfinden. Deswegen zieht er sich zurück, um in Abgeschiedenheit alles noch einmal neu zu erfinden. Eine solche Entwicklung darf Schule natürlich nicht fördern. Schule muss den Schülerinnen Raum und Zeit zur Verfügung stellen, in sozialen Prozessen zu lernen, in die auch die Lehrerin nicht mehr als Lenkerin des Lernprozesses, sondern als fachkompetente Beraterin eingebunden ist.

Doch, mit Blick auf die Äußerungen der Schülerinnen und Lehrerinnen, können die Schülerinnen dazu ermutigt werden, ihren Lernprozess selbsttätig und verantwortungsvoll zu gestalten? Lässt das vorgesehene Basiswissen des Mathematikunterrichts ein solches Vorgehen zu? Sind die Schülerinnen und die Lehrerinnen überhaupt in der Lage, in zwangsläufig veränderten Rollen miteinander zu arbeiten? Und die zentrale Frage dieser Arbeit: Sind die Schülerinnen in der Lage eigentätig mathematische Begriffe zu erfinden?

Auf Grundlage einer konstruktivistischen Didaktik[3] werde ich im ersten Teil dieser Arbeit eine Lerntheorie entwickeln, die ein tragfähiges Modell bereitstellt, den Prozess des Erfindens zu fundieren. Auf Grundlage von fünf Grundannahmen, auf denen mein Konzept einer konstruktivistischen Theorie des Lernens beruht, wird ein für dieses Konzept tragfähiger Wahrheitsbegriff entwickelt. Dies ist insofern notwendig, als zur Beurteilung von Wissen immer ein Gütekriterium vorhanden sein muss, welches uns gestattet, zu ermessen ob wir „richtiges“ Wissen besitzen. Insbesondere für den Wissensaufbau in der Schule ist der Wahrheitsbegriff von entscheidender Bedeutung, da das Wahrheitskriterium die Grundlage für jede Leistungsbewertung stellt. Daran anschließend stelle ich essentielle Merkmale konstruktivistischer Lernarrangements und darauf aufbauend das von mir entwickelte Intentional-konstruktivistische Lehr-/Lernmodell KLIP (*Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen*) vor. Zentraler Bestandteil dieser Lernumgebungen sind Kernschemata und das Führen von Forschungsheften, die im Anschluss vorgestellt werden. In den Forschungsheften dokumentiert jede einzelne Schülerin ihren individuellen Begriffsbildungsprozess. Die von mir entwickelte Theorie konstruktivistischer Begriffsbildung wird im dritten Abschnitt des ersten Teils dargestellt. Da ferner der Einsatz von Computern[4] begünstigend für die Umsetzung konstruktivistischen Lernens sein sollte, werde ich die für diese Arbeit relevanten didaktischen Prinzipien und Funktionen des Computereinsatzes erörtern. Der erste Teil schließt mit einer Analyse von möglichen Geschlechterdifferenzen im Mathematikunterricht. Die Diskussion dieser Thematik scheint angeraten, da die Gleichbehandlung aller Erfindungen zentrales Anliegen des hier vorgestellten Konzeptes ist.

Da jede Theorie ohne Praxis blind ist, wurde die Umsetzung des Konzeptes in einem Schulversuch erprobt. In vier Kursen der Jahrgangsstufe 12 der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen wurde während des Schuljahres 2000/01 dieses Modell in die Praxis umgesetzt. Ausgehend von Intentionalen Problemen bekamen die Schülerinnen die Gelegenheit die Begriffe der Integralrechnung selbst zu erfinden. Die konkrete Ausgestaltung des Versuchs, die didaktischen und fachlichen Aspekte des Integralsbegriffs und die Intentionalen Probleme werden im zweiten Teil der Arbeit vorgestellt.

Im dritten und letzten Teil dieser Arbeit werden die Ergebnisse dieses Schulversuchs ausgewertet. Auf Grundlage der Forschungshefte, einer Vergleichsuntersuchung mit Kontrollkursen und einer Schülerinnenbefragung werden die theoretischen Grundlagen des Konzeptes KLIP, die Erwartungen an diesen Schulversuch und deren mögliche Realisierung erörtert. Die Erwartungen und Fragestellungen lassen sich mit den folgenden zentralen Forschungsfragen zusammenfassen:

- Sind die Schülerinnen in der Lage eigentätig und selbstständig mathematische Begriffe zu erfinden?
- Genügt das Ergebnis der Begriffsbildung den schulischen Ansprüchen?
- Entwickeln die Schülerinnen ein größeres Interesse an Mathematik und ein anderes Verständnis von Mathematik durch den vollzogenen Perspektivwechsel?

---

[3] Vgl. z.B. WEINERT & MANDL (1997), VON GLASERSFELD (1998), KÖSEL (1997), SIEBERT (1999), REICH (1996) und für Kritik: z.B. TERHART (1999a), MILLAR (1989).

[4] Soweit es aus dem Gesamtzusammenhang nicht anders hervorgeht, verwende ich den Begriff Computer synonym sowohl mit dem Begriff Hardware als auch mit dem Begriff Software oder Programm.

Ich danke Prof. Dr. Norbert Knoche für die Themenstellung und die wertvollen Anregungen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Für Ratschläge und Diskussionen danke ich Frau Bärbel Barzel, Frau Sonja Vordermark, und den Herren Dr. Torsten Fenske, Abel Halbach, Eckhard Knuppertz und Andreas Pallack.

Ich danke allen beteiligten Schülerinnen und Lehrerinnen, ohne die dieses Projekt nicht denkbar gewesen wäre. Dabei möchte ich besonders meinem Leistungskurs danken, dessen Begeisterung und Eifer mir das Unterrichten immer wieder zum Genuss hat werden lassen.

Ich danke der Firma DERIVE-Europe (jetzt Texas Instruments) und der Universität Essen für die Bereitstellung von Software und Hardware.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Frau Anke danken, ohne deren Unterstützung und vielen wertvollen Diskussionen die Fertigstellung dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Besonders danken möchte ich meinen Kindern Elias, Fabian und Laura, die mit viel Verständnis und aller Kraft meine Arbeit unterstützt haben.

TEIL 1

Theoretische Grundlagen

KAPITEL I

1 Theoretische Grundlagen zum Konstruktivismus

Der Konstruktivismus erfreut sich gegenwärtig einer großen Aufmerksamkeit in der deutschsprachigen Didaktik. Da es jedoch kein einheitliches Theorieverständnis gibt, erläutere ich in diesem Kapitel den für diese Arbeit notwendigen Theorierahmen. Zur Einordnung der hier dargelegten Theorie werden nur die konstruktivistischen Ansätze skizziert, die für die Fragestellung der Arbeit relevant sind.

1.1 Konstruktivismus: radikal, sozial, affektiv

Die Frage nach der Fähigkeit des Menschen eine außerhalb seiner selbst liegende Welt zu erkennen, ist eine Frage, deren Ursprung sehr weit zurückliegt. Schon XENOPHANES (DIELS, 1957, S. 20) war das erkenntnistheoretische Dilemma bewusst: Folgt man der heute noch allgemein akzeptierten Annahme, es existiere eine vom menschlichen Subjekt unabhängige Welt, die von diesem erkannt werden kann, so führt dies notwendig zu dem Paradoxon, dass dieses Subjekt die Ideen, die es durch den Wahrnehmungsprozess von den Dingen der Welt erlangt hat, nicht mit den ursprünglichen Dingen vergleichen kann, da „der einzige Zugang zu dieser Welt [...] ein erneutes Wahrnehmen und Begreifen" (VON GLASERSFELD, 1998, S. 500) wäre. Philosophen wie LOCKE (1690), BERKELEY (1710), VICO (1858) und KANT (1787) versuchten dieses Paradoxon zu vermeiden. Doch erst mit Hilfe der Evolutionstheorie von DARWIN wurde die Zielvorstellung von Erkenntnis, Realität in den eigenen kognitiven Strukturen zu repräsentieren, durch den Begriff der Anpassung um eine neue Sichtweise ergänzt. Nur *die* Lebewesen können überleben, die in der Lage sind, sich an die gegebenen Umweltbedingungen anzupassen. PIAGET (z.B. 1974, 1977a, 1998) übertrug diese Theorie auf den Bereich der Kognition und erklärte Wissen an zielgerichtetes Handeln gebunden, wobei das Erkennen eines Gegenstandes in seiner Assimilation bzw. der Akkomodation der eigenen Strukturen besteht (PIAGET, 1977b, S. 74). Ziel ist die Herstellung eines Gleichgewichtszustandes zwischen erlebter Wirklichkeit[5] und den kognitiven Strukturen. Die Güte von Lernen und Wissen wird somit nicht nach der Güte der Abbildung von Realität, sondern nach ihrer Funktion in der Wirklichkeit bestimmt. Lernen ist somit ausdrücklich instrumenteller Art (VON GLASERSFELD, 1995). Damit steht VON GLASERSFELD hinsichtlich einem dem Wissensaufbau korrespondierenden Wahrheitsbegriff[6] in der Nachfolge des *Skeptizismus*[7] und des *Pragmatismus*[8], wobei der

[5] In Abgrenzung zum Begriff der *Realität* bezeichnet *Wirklichkeit* die individuelle Erlebniswelt des Subjekts.

[6] Eine epistemologische Theorie muss immer auch einen Wahrheitsbegriff enthalten, denn ohne die Möglichkeit einer Identifikation von Wissen und Güte dieses Wissens, „kann man sich nicht sicher sein, echtes Wissen erreicht zu haben" ALBERT (1977).

Bezug zum *Realismus*, beispielsweise bei JAMES (1977), durch einen *internen Realismus* im Sinne PUTNAMS (2000) aufgehoben wird. Ausgehend von diesem Erkenntnisbegriff entwickelte ERNST VON GLASERSFELD die Theorie des **Radikalen Konstruktivismus.**[9]

Primäres Anliegen des Radikalen Konstruktivismus ist die Erfassung der Unabhängigkeit von Subjekt und Realität. Damit wird der erkenntnistheoretische Standpunkt des kritischen Realismus unterstützt: unsere Sinnesorgane bilden die Welt so gut ab, wie sie können, d.h. im Rahmen des evolutiv Bewährten.

VON GLASERSFELD formuliert die beiden zentralen Grundannahmen des (Radikalen) Konstruktivismus folgendermaßen:

> **(1) „Wissen wird vom denkenden Subjekt nicht passiv aufgenommen, sondern aktiv aufgebaut.**
>
> **(2) Die Funktion der Kognition ist adaptiv und dient der Organisation der Erfahrungswelt, nicht der Entdeckung der ontologischen Realität.“**
>
> (VON GLASERSFELD, 1998, S. 49)

Eine ähnliche Position hinsichtlich der Erfassung von Realität nehmen die Begründer des **biologisch begründeten Konstruktivismus** (vgl. auch MATURANA & VARELA, 1987, (MATURANA, 1996), HUMBERTO MATURANA und sein Schüler und Kollege FRANCISCO VARELA, ein: „Was in einem lebenden System vor sich geht, entspricht dem Geschehen bei einem Instrumentenflug, bei dem der Pilot keinen Zugang zur Außenwelt hat und lediglich als Regulator der durch seine Fluginstrumente angezeigten Werte fungieren darf“ (MATURANA, 1982, S. 23). Im Zentrum ihrer Untersuchungen stehen die Konzepte der Autopoiese[10] und der strukturellen Kopplung bzw. der Ko-Ontogenese zwischen operational geschlossenen, aber interagierenden Systemen[11]. Damit sind Lernen, Beobachten und Erken-

---

[7] In Abgrenzung zu den Abbildungs- und Korrespondenztheorien, die davon ausgehen, dass etwas wahr ist, wenn es dem entspricht oder mit dem übereinstimmt, von dem es ausgesagt wird, verzichtet man im Skeptizismus entweder ganz auf einen Wahrheitsbegriff (vgl. z.B. den *universellen Skeptizismus* (BIERI, 1994, STEGMÜLLER, 1954: Man kann die Existenz wahrer Tatsachen akzeptieren und die Tatsachen dennoch für unerkennbar halten) und den *Wahrheitsskeptizismus* (STEGMÜLLER, 1954)) oder aber folgt alternativen Wahrheitskonzeptionen, wie zum Beispiel der *skeptischen Wahrheitstheorie*, die davon ausgeht, dass Wissen immer wahr ist (vgl. NAESS (1968). Damit kann jedoch lediglich die Gültigkeit von logischen und begrifflichen Wahrheiten geprüft werden.

[8] Die Wahrheitstheorie des *Pragmatismus* (vgl. DEWEY, 1998, JAMES, 1977, PEIRCE, 1976) bezeichnet etwas als wahr, wenn es sich in der Praxis längerfristig bewährt. Während Wahrheit nach PEIRCE sich als Übereinstimmung aller Mitglieder einer Forschungsgemeinschaft herausbildet, arbeitet JAMES eine subjektive Prägung heraus, d.h. die Bewährung in der Praxis muss sich für das einzelne Subjekt in einem befriedigenden Umgang mit der Wirklichkeit zeigen. Darüber hinaus steht JAMES, ähnlich wie PIAGET, für eine *Konvergenztheorie des Wissens.* DEWEY, dessen Vorschläge weitreichende Konsequenzen für die Pädagogik haben, verknüpft Erkennen mit Handeln in konkreten Zusammenhängen und verleiht damit dem Erkennen ein instrumentelles Gütekriterium.

[9] Neben VON GLASERSFELD (1991, 1992, 1998) gehören u.a. VON FOERSTER (1985, 1992b, 1998), WATZLAWICK (1981), WATZLAWICK & KRIEG (1991) zu den Begründern und Verfechtern des Radikalen Konstruktivismus. In Deutschland waren es vor allem der systemtheoretisch orientierte Literaturwissenschaftler SCHMIDT (1994) und REICH (1996), die die Diskussion um den Radikalen Konstruktivismus beeinflussten.

[10] *Autopoiese* bezeichnet den Prozess der autonomen Selbstgestaltung von Lebewesen.

[11] Unter „operational geschlossenen Systemen“ verstehen die beiden Autoren in ihrer Organisation selbstbezügliche und strukturdeterminierte Einheiten. Unter *Struktur* verstehen sie die Bestandteile und Relationen, die in konkreter Weise eine bestimmte Einheit konstituieren und ihre Organisation verwirklichen. *Organisation* bezeichnet die Relationen zwischen Bestandteilen eines Systems. Mit diesem Vokabular lässt sich *Autopoiese* auch als Strukturveränderung eines Systems hinsichtlich der Anpassung an das umgebende Milieu bei gleichzeitiger Organisationsstabilität begreifen. (Vgl. auch MATURANA & VARELA, 1987, MATURANA, 1996, ROTH, 1991).

nen selbstreferenzielle und rekursive Prozesse. Das sind Prozesse, die ihre „eigenen Ergebnisse als Grundlage weiterer Operationen" (LUHMANN, 1990, S. 44) verwenden.

Hier setzt ein Kritikpunkt am Radikalen Konstruktivismus an: „Wenn man keinen Zugang zur Realität hat, dann kann man diesen Sachverhalt nicht erkennen" (NÜSE et al., 1991, S. 249). Dies ist jedoch ein ontologisches Argument, der Konstruktivismus hingegen argumentiert epistemologisch. Nicht die Realität ist der Ausgangspunkt des Erkennens, sondern das erkennende Subjekt steht im Zentrum. Das ist der wesentliche Paradigmenwechsel. Es ändert sich die Richtung des Erkenntnisprozesses.

Ein zweiter Kritikpunkt ist: Der Konstruktivismus sei nichts weiter als „solipsistischer Cartesianismus" (FLACKE, 1998, S. 521). Das würde heißen, dass jedes Subjekt willkürlich eine eigene Welt erschafft. Adaption verläuft jedoch nicht willkürlich, sondern orientiert sich an der *Viabilität* des Handelns. Eine Handlung ist nur dann *viabel*, wenn sie die Perturbationen erfolgreich bewältigt, d.h. neue Objekte für das eigene Überleben (biologisch gesprochen) sinnvoll assimiliert bzw. vorhandene Wissensstrukturen akkomodiert. Auf der kognitiven Ebene bedeutet das, dass die Begriffe innerhalb eines Begriffsnetzes widerspruchslos verknüpft werden können. *Objektivität* wird nicht durch solipsistische Subjektivität, sondern durch *Viabilität* ersetzt.

Dennoch stellt sich die Frage, wie operational geschlossene Systeme miteinander kommunizieren können. Der **Soziale Konstruktivismus** nach HEJL (1995) versucht dem zu begegnen, indem der Begriff *Selbstreferenzialität* durch den Begriff *Synreferenzialität* ergänzt wird. „Während Selbstreferenzialität den Bezug auf die Zustände eines kognitiven Systems bezeichnet [...], hebt Synreferenzialität den Bezug auf im Sozialsystem ausgebildete oder/und für es konstitutive Zustände hervor" (HEJL, 1995, S. 195). Die Ziele der Gruppe müssen ständig mit den im individuellen Erkenntnisprozess ausgebildeten Strukturen abgeglichen werden. Ebenso wie HEJL ersetzt der soziale Konstruktionismus nach GERGEN (1985, 1995)[12] in Anlehnung an VYGOTSKY (1981) den individualistischen Erkenntnisprozess durch einen gemeinschaftlichen und konventionalistischen. Dadurch verschiebt sich der Schwerpunkt von der individuellen zur sozialen Ebene. VON GLASERSFELD (1998) merkt dazu kritisch an:

> *„Der soziale Konstruktivismus tut so, als sei dieses Wissen zwischen den Leuten. [...] Das ist der Punkt, den ich nicht verstehe. Was heißt das? Wo ist es? Ja, die Interaktionen spielen eine enorme Rolle. Aber ich bin immer nur an einem Ende der Interaktion. Ich kann nie an beiden sein."*
> (ebd., S. 344)

Hieran anknüpfend möchte ich Wissen als im individuellen Bewusstsein liegend betrachten, seine Determiniertheit jedoch weder allein durch die individuelle Struktur noch durch das Konzept der Synreferentialität erklären, sondern ich möchte neben der individuellen Wissenskonstruktion den sozialen Interaktionen mit dem umgebenden Milieu einen starken Einfluss auf den Wissensaufbau einräumen.

COBB & YACKEL (1996) und BAUERSFELD (1995) behaupten, dass die soziale und die psychologische Perspektive sich absolut symmetrisch zueinander verhalten. So zeigten COBB & YACKEL (1996), dass bei Gruppenneubildungen sowohl das Individuum die Gruppen-Normen beeinflusst als auch reziprok das individuelle Rollenverständnis durch die Gruppen-Normen Veränderungen erfährt. LERMAN (1996) hingegen weist darauf hin, dass eine komplementäre Beziehung beider Perspektiven nicht möglich sei: „The major confusion that arises from the desire to claim that knowledge is constructed by the individuell but that sometimes knowledge is absorbed from culture" (ebd., S. 44). Inwieweit sich die soziale

[12] Auf andere Formen des Sozialen Konstruktivismus soll hier nicht weiter eingegangen werden.

und die individuelle Perspektive reziprok zueinander verhalten bzw. ob und in welcher Weise sie komplementär zu verstehen sind, soll im konkreten Unterricht untersucht werden. Eine Orientierung über das Maß des Einflusses beider Perspektiven zu bekommen, ist ein Anliegen des im Weiteren dargestellten Forschungsprojektes.

In dieser Arbeit wird die Annahme zu Grunde gelegt, dass es eine soziale Realität gibt, die durch interaktionistische Prozesse, insbesondere durch sprachlich-interaktionistische Prozesse bedingt wird. Zudem wird die kulturelle Bedingtheit von wissenschaftlichen Theorien anerkannt. Folglich müssen die beiden Grundannahmen des Radikalen Konstruktivismus durch die nachfolgenden Prämissen ergänzt werden.

(3) Die subjektiven Theorien müssen innerhalb der sozialen Realität viabel sein.

(4) Subjektive Theorien werden durch die gemeinsame Aushandlung zu kollektiven und anerkannten Theorien.

Damiterhält man einen um eine „soziale Komponente" modifizierten Radikalen Konstruktivismus.[13]

Geht man nach (3) und (4) von der Existenz einer sozialen Realität aus, so müssen wir den subjektiven und instrumentellen Wahrheitsbegriff ebenfalls um eine soziale Komponente erweitern zu einem diskursiven konsenstheoretischen Wahrheitsbegriff[14]. Für einen derartigen Diskurs halte ich die nachfolgenden praktischen Grundregeln für unentbehrlich (vgl. auch HABERMAS, 1991): 1) Unvoreingenommenheit aller Beteiligten[15], 2) Wahrhaftigkeit, 3) Gemeinsamkeit des Sprachgebrauchs[16], 4) Abstinenz von Machtausübung, 5) keine Persuasion, 6) verständliche und logische Argumentation, 7) alle Beteiligten können gleichermaßen an alle Informationen gelangen, 8) maximale Zielperspektive des Diskurses ist Konsens, jedoch minimal: Jede Beteiligte muss dem Ergebnis zustimmen können[17]. Damit erhalten wir einen personalen und instrumentalen Wahrheitsbegriff, der innerhalb eines Diskurses von seiner subjektiven Dimension in eine soziale Dimension transponiert wird und von dort reziprok auf die subjektive Dimension zurückwirkt. Damit erhält das Subjekt bzw. die Gruppe Aussagen, die von ihnen als wahr anerkannt werden, deren Übereinstimmung mit der Realität jedoch nicht überprüft werden kann. Eine Theorie, die scheitert, wird somit als falsch bezeichnet.

Nicht zuletzt durch die Forderung der Aufrichtigkeit im Diskurs tritt gemeinsam mit dem interaktionistischen Element ein weiterer wichtiger Aspekt im Prozess des Wissensaufbaus zu Tage, der erst in den letzten drei Jahren diskutiert wird (Vgl. z.B. VON GLASERSFELD, 1998, WEINERT ET AL., 1997) und dem kognitionslastigen Konstruktivismus fehlt: die *Affekte*[18]. Ebenso wie Kognition finden Affekte dauernd statt, und zwar nicht antagonis-

[13] Die in dieser Arbeit entwickelte Form eines Sozialen, Radikalen und Affektiven Konstruktivismus wird nachfolgend der Einfachheit halber nur noch Konstruktivismus genannt.

[14] Der Erlanger Konstruktivismus nach KAMLAH & LORENZEN (1992) verwendet eine Konsensustheorie, die in diesem Zusammenhang nicht gemeint ist.

[15] Unvoreingenommenheit meint in diesem Zusammenhang den „Willen zur Vernunft".

[16] Gleiche Begriffe dürfen nicht unter verschiedenen Bedeutungen benutzt werden.

[17] Eine solche Zustimmung setzt natürlich voraus, dass alle am Diskurs Beteiligten dieselben Informationen besitzen und sich hinreichend mit dem Diskussionsgegenstand auseinander gesetzt haben.

[18] Der Begriff *Affekte* kann gleichbedeutend mit „Gefühlen", „Emotionen", „Launen" usw. verstanden werden. Da diese Begriffe jedoch selbst vielfach unterschiedlich definiert wurden und insbesondere durch den alltäglichen Sprachgebrauch sehr unscharf sind, soll die folgende formale und umfassende Definition Grundlage für diese Arbeit bilden: „Ein Affekt ist eine von inneren oder äußeren Reizen ausgelöste, ganzheitliche psycho-physische Gestimmtheit von unterschiedlicher Qualität, Dauer und Bewusstseinsnähe" (CIOMPI, 1999, S. 67).

tisch, sondern in gegenseitiger Ergänzung. Die Fähigkeit, etwas zu lernen, setzt immer die Bereitschaft, etwas lernen zu wollen, voraus. Ohne Gefühle und Wünsche lässt sich kein Mensch zum Denken bewegen. Somit lässt sich der Aufbau von Wissen nur unter Einbeziehung der Affekte verstehen.

Der Schweizer Neurobiologe LUC CIOMPI (1982, 1999) hat den Zusammenhang von Kognition und Affekten genauer untersucht. Er spricht von „Affektlogik“ und meint damit, dass sowohl die Logik von den Affekten gesteuert wird als auch die Affekte eine Logik besitzen. Er entwickelt ein Konzept der operationalen affektiv-kognitiven Bezugssysteme oder *Fühl-, Denk- und Verhaltensprogramme*, die sich in Anlehnung an die Theorie von PIAGET im handelnden Erleben herausbilden. Diese Programme entstehen „selbstorganisatorisch in der Aktion durch operationale Zuordnung bestimmter Affekte zu bestimmten Kognitions- und Verhaltenssequenzen. Sie werden durch repetitive Erfahrung laufend befestigt, verändert und neu konstruiert“ (CIOMPI 1999, S. 52). Durch das Konzept von Fühl-, Denk- und Verhaltensprogrammen wird ein Zusammenhang zwischen dem psychischen, sozialen und biologischen Phänomenbereich impliziert und damit das seit Jahrhunderten diskutierte Leib-Seele-Problem tangiert. Auf Grundlage unterschiedlicher Untersuchungen (ebd., S. 91) weist CIOMPI ein Zusammenspiel der drei Bereiche im Sinne der strukturellen Kopplung nach MATURANA und VARELA nach. Affekte treten wechselwirkend in allen drei Bereichen auf und wirken damit ebenfalls auf das Denken ein. CIOMPI spricht von „*Operatorwirkungen der Affekte auf die Kognition*“ (ebd., S. 93). Unter diesen Wirkungen versteht er beispielsweise, dass Affekte „`Motivatoren´ aller kognitiven Dynamik“ (ebd., S.95) sind, dass sie den „Fokus der Aufmerksamkeit“ (ebd., S. 95) bestimmen, dass sie Zugänge zu unserem Gedächtnis regulieren, dass sie unsere Denkinhalte hierarchisieren und Informationen selektieren.

Damit erhalten wir eine fünfte und vorerst letzte Grundannahme für den Wissensaufbau:

(5) Affekte und Kognition befinden sich fortwährend in reziproker Wechselwirkung.

Dieser Zusammenhang bedeutet für den personalen, instrumentalen und pluralistischen Wahrheitsbegriff die Berücksichtigung eines weiteren Kriteriums: die *affektive Adäquatheit.* „In jeder spezifischen affektiven Befindlichkeit werden ganz andere kognitive Inhalte bevorzugt [...] und zu umfassenden Sichtweisen oder „Wahrheitssystemen“ verbunden. Was nicht dazu passt, wird entweder ausgeblendet oder affektkonform eingefärbt“ (ebd., S. 104).

Die fünf Grundannahmen bilden für mich den Ausgangspunkt für eine konstruktivistische Theorie des Lernens in den drei Dimensionen, kognitiv, affektiv und sozial.

Diese werden im Folgenden konkret auf den Bereich Schule übertragen. Die Thesen sind zwar allgemein formuliert, erheben jedoch nicht den Anspruch auf den Ansatz einer allgemeinen Didaktik (vgl. TERHART, 1999). Im Vordergrund steht die Überprüfung der Theorie in der Praxis, und dies im engen Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe II.

1.2 Merkmale konstruktivistischer Lernumgebungen

Die fünf Grundannahmen zum Wissensaufbau bedingen eine entsprechende Gestaltung der Lehr- und Lernumgebungen. Bei dem Wechsel von der Theorie zur Praxis-Ebene ergeht es vielen didaktischen Theorien so, dass sie operativ tauglich gemacht werden und damit immer einen mehr oder minder großen Teil ihrer Essenz einbüßen. Im Fall der konstruktivistischen Didaktik bedeutete das oft, dass Ideen für den Schulalltag operationalisiert wurden, wodurch am Ende nicht wenige instruktionistische Elemente wiederzufinden waren. Sogenannte konstruktivistische Modelle wie *Anchored Instruction* (COGNITION AND TECHNOLOGY GROUP OF VANDERBILT (CGTV), 1992, 1993, 1997) und *Cognitive Apprenticeship* (COLLINS et al., 1989) oder die Konzeption des *Moderaten Konstruktivismus* haben auf der Theorie-Ebene dieser Schwierigkeit schon Rechnung getragen, indem sie nicht mehr die Unerkennbarkeit der Realität postulieren, sondern lediglich den Konstruktionsprozess von Wissen hervorheben. Es stellt sich die Frage, ob dies „ein systematisch notwendiges Vorgehen oder `nur´ ein schlichter Fehler" (TERHART, 1999, S. 645) ist. Die Situation wird verständlicher, wenn man berücksichtigt, dass die meisten Lehrerinnen, die heute in der Schule unterrichten, sowohl während ihrer eigenen Schullaufbahn als auch während der Lehramtsausbildung instruktionistisch ausgebildet worden sind. Darüber hinaus stecken die institutionellen Rahmenbedingungen das Bewegungsfeld neuer didaktischer Modellversuche sehr eng ab. Diese Situation verlangt auf der Theorie-Ebene eine stärkere Beachtung und auf der empirischen Ebene mehr Untersuchungen, die diese Situation berücksichtigen. Das Konzept des geplanten Schulversuchs will diese institutionellen Begrenzungen sinnvoll eingliedern. Darüber hinaus impliziert die soziale Dimension des in dieser Arbeit entwickelten und untersuchten Konzepts den systematisch notwendigen Schritt, Instruktion und Konstruktion nicht konträr, sondern komplementär zu verstehen und bestmöglich zu verbinden. Inwieweit ein derartiger Zugang tragfähig ist, soll anhand eines Vergleiches konstruktivistischer Merkmale und instruktionistischer Merkmale von Unterrichtsgestaltung hinsichtlich einer Verknüpfung der guten Ansätze beider Modelle gezeigt werden.

Die im Folgenden dargestellten Merkmale konstruktivistisch orientierter Unterrichtsgestaltung sind Implikationen aus den oben genannten Grundannahmen.

K 1. Die zu behandelnden Problembereiche und die hierfür heranzuziehenden Unterrichtsmaterialien sind der Realität entnommen, d.h. es handelt sich um **komplexe** (möglichst nicht durch *eine* Schülerin lösbar), **authentische**, **ganzheitliche**, **lebens**- und **berufsnahe**, **nicht reduktionistische** und **unstrukturierte** Problemstellungen und -materialien,
K 2. die unter **multiplen** Perspektiven
K 3. auf **unterschiedlichen Lösungswegen** zu **unterschiedlichen Lösungen** führen können.
K 4. Die Probleme haben **exemplarischen** Charakter.
K 5. Die Lerninhalte sind an den **individuellen Vorerfahrungen** und **Interessen** der Schülerinnen orientiert, womit auch **Affekte** zentrale Aspekte des Unterrichtsgeschehens werden.
K 6. Lernen wird als ein **aktiver und konstruktiver Prozess** verstanden.
K 7. Lernen ist **situiert**, d.h. z.B. dass Lern- und Anwendungssituation vergleichbar sind.
K 8. Die Lernumgebungen haben die Schülerin im Mittelpunkt und gestehen ihr ein Höchstmaß an **Selbstregulation** zu.
K 9. Die Lernprozesse werden durch **kollektives und kooperatives Lernen** bestimmt, wodurch die individuellen Interpretationen und Lösungsvorschläge mitgeteilt, verglichen und modifiziert werden können.
K 10. Die sprachliche Aufbereitung und Darstellung der individuellen Wissenskonstruktionen und die sprachliche Reflexion des Lernprozesses sind zentrale Ingredenzien der Lernumgebung.
K 11. **Fehler** sind wichtiger Bestandteil des Lernprozesses.
K 12. Der Lernprozess wird kontinuierlich durch die Lernende **reflektiert** und **beurteilt**.

TERHART (1999a, b) kritisiert an vergleichbaren Merkmalslisten (vgl. z.B. DUBS, 1995 und WOLFF, 1994), dass diese keine spezifischen Unterschiede zu allgemeindidaktischen Konzeptionen, oder allgemeiner zu gutem Unterricht überhaupt, aufweisen, bzw. sich nicht von kognitiven Ansätzen unterscheiden. Deswegen seien hier die sozialen, die sprachlichen und die affektiven Aspekte (K5, K9 & K10) noch einmal in den Vordergrund gestellt. Die kognitive Perspektive ist darauf ausgerichtet, Wissen optimal für den individuellen Lernprozess zur Verfügung zu stellen. Dagegen ist ein wesentlicher Bestandteil der sozialkonstruktivistischen Perspektive die Aggregation verschiedener Individuen innerhalb sozialer Systeme (vgl. auch GERSTENMAIER & MANDL 1999). Dies wird besonders deutlich am Beispiel der „Subjektivität der Sprache“ (VON GLASERSFELD, 1999, S. 502). Erfahrungen im Physikunterricht haben gezeigt, dass sich die individuellen Vorerfahrungen der Schülerinnen z.B. in unterschiedlichen Bedeutungen gleicher Begriffe zeigen (AUFSCHNAITER et al., 1992). Dies erzeugt ein Verständigungsproblem zwischen den beteiligten Subjekten, was durch die Bedeutung der in der wissenschaftlichen Gemeinde gebräuchlichen physikalischen Begriffe, wie beispielsweise bei dem Wort „Geschwindigkeit“, noch verstärkt wird. Ohne eine Verständigung oder Aushandeln über die Bedeutung der benutzten Begriffe ist ein in Gruppen, oder allgemeiner, ein in der Gesellschaft geteiltes Wissen nicht denkbar. So wie jedes individuelle Wissen nur auf der Neuorganisation von schon vorhandenen Begriffen beruht, die im Wesentlichen durch das Zusammenspiel von Abstraktion und Reflexion entstehen, beruht geteiltes Wissen auf dem Aushandeln der Begriffsbedeutungen, was wiederum durch die Reflexion auf den individuellen Lernprozess zurückwirkt. Die Unterrichtende darf folglich nicht annehmen, dass eine durch sie sprachlich verfasste Definition von allen Schülerinnen verstanden werden kann, bevor sie nicht von allen ausgehandelt[19] wurde.

Eine andere Kritik zielt auf eine mögliche Unvereinbarkeit von situiertem, authentischem und alltagstauglichem Lernen und dem „eigentlichen Zweck“ von Schule, der laut TERHART (1999a, S. 52f.) in einer Übersteigung dieser Form des Lernens liegt und ihre Stärke in der Institutionalisierung, Methodisierung und Systematisierung von Lernen hat. Hinsichtlich der Zuweisung dieser Kriterien zum Zweck von Schule stimme ich TERHART zu. Schule würde sich überflüssig machen, wenn ihr einziger Zweck in einer Verknüpfung mit den konkreten Alltagsproblemen der Schülerinnen läge. Aber auch systematisches Lernen kann nur *mit* und *durch* die betroffene Schülerin erfolgreich sein. Die zu behandelnden Problemfelder müssen in ihrer Sinnhaftigkeit der Schülerin transparent sein. Der langfristige Nutzen muss kurzfristig einsehbar sein. Das bedeutet, die Wissensdomänen werden durch die Lehrenden vordefiniert, wodurch die Inhalte vorgegeben sind. Fragen und Problemfelder werden durch die Schülerin entworfen. Dies macht eine Präsentation des Inhaltes in Form der oben genannten Kriterien notwendig.

1.3 Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen (KLIP)

Neben der Erfüllung konstruktivistischer Merkmale muss ein didaktisches Konzept eine Phasierung des Unterrichtsprozesses enthalten. In den letzten Jahren hat es viele Versuche gegeben, derartige Konzepte zu kreieren. Ich kann auf diese Konzepte im Einzelnen nicht eingehen. Ich werde aber die Verbindung einiger von mir ausgewählter zu dem meinen Untersuchungen zu Grunde liegenden Konzept aufzeigen.

[19] *Aushandeln* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Bedeutung der von der Lehrerin verwendeten Worte mit deren Bedeutungen für die Schülerinnen verglichen werden und hinsichtlich eines gemeinsamen Verständnisses modifiziert werden.

Meinen in dieser Arbeit verwendeten Ansatz nenne ich *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen* (KLIP). KLIP ist in drei Phasen unterteilt[20]:

1. **Phase der Problemerschließung**
2. **Phase der Problemlösung und Wissenserarbeitung**
3. **Phase der Präsentation und der Reflexion**

1. Die Phase der Problemerschließung. Das zu lernende Fachwissen ist durch die Curricula determiniert. Das bedeutet, dass zusammen mit der organisatorischen Struktur der Schule gewisse Rahmenbedingungen als gegeben angenommen werden müssen. Die Lehrerin weiß um das reguläre Wissen[21], das die Schülerinnen sich aneignen sollen. Sie ist auf Grund ihrer Erfahrung in der Lage das gesamte Stoffgebiet, inklusive der „heiklen" Stellen, zu überblicken und zu sequenzieren. GALLIN & RUF (1993, 1998, 1999) nennen dies die Perspektive der *Rückschau*. Die Schülerinnen kennen den zu erarbeitenden Themenbereich noch nicht und blicken notwendig aus der Position der *Vorschau* auf diesen. Neue Problemstellungen erscheinen ihnen unstrukturiert und unüberschaubar. Sie müssen ihre *singuläre* Position, d.i. eine im Privaten verankerte Welt, die sich durch individuelle Erfahrungen, Wünsche und Erwartungen auszeichnet (ebd., S.22), erst mit der regulären Welt des Inhalts in Beziehung setzen und verknüpfen. Bindeglied für die Verknüpfung von Singulärem und Regulärem sind Problemstellungen, die der Schülerin Orientierungs- und Motivierungshilfen geben, sich in dem neuen Gebiet zurecht zu finden. Solche Hilfen nennen GALLIN und RUF *Kernideen* (vgl. Abschnitt 4.2)[22].

Schülerinnen und Lehrerin befinden sich hiernach in einem Spannungsfeld, das von den beiden Perspektiven Vorschau und Rückschau bestimmt wird. Die Schülerin wechselt fortwährend zwischen beiden Blickwinkeln. In einem ersten Schritt muss sie auf Grundlage der Rückschau auf ihr bestehendes Wissen die Problemstellungen des neuen Gebietes erarbeiten und formulieren. Danach gelangt sie auf ihrem individuellen Pfad Schritt für Schritt ins neue Gebiet. Jeder Schritt und damit jede Erweiterung ihres Gesichtsfeldes verändert permanent ihre Vorschauperspektive bei gleichzeitigem Wandel ihrer Rückschau auf das gerade neu erlernte Wissen. Die Lehrerin hingegen befindet sich zwar zu Anfang wissend hinsichtlich des Themas in der Rückschauperspektive, nimmt jedoch bezüglich den von der einzelnen Schülerin gebildeten Problemstellungen und Lösungsmöglichkeiten auf ihre eingebrachte Kernidee eine vorschauende Position ein. RUF und GALLIN schreiben dazu:

> *„Wichtig ist, dass der Lernende [in dieser Phase, Anm. von S.H.] Selbstvertrauen gewinnt und mit der eigenen Art des Wahrnehmens, Denkens und Handelns zurechtzukommen lernt. Er bewegt sich in Fachgebieten, die der Lehrer ihm vorgegeben hat, beschreitet aber eigene Wege. Dabei braucht er sich noch nicht an Normen und Begriffen des Regulären zu orientieren, […] wird aber verpflichtet,*

[20] Die Phasierung von KLIP ist angelehnt an BARROWS (1986). BARROWS stellte ein Konzept zum problemorientierten Lernen vor, das eng an das folgende Schema gebunden war: 1. Erste Bearbeitung (Problemsuche, Hypothesenbildung, Ermittlung der Wissenslücken); 2. Selbstständige Wissenserarbeitung in Gruppen; 3. Berichterstattung und Überprüfung der Hypothesen; 4. Lösung und Präsentation.

[21] Unter *regulärem Wissen* verstehe ich das von der jeweiligen wissenschaftlichen Gemeinde über Jahrhunderte entwickelte, ausgehandelte und dort allgemein anerkannte Wissen. Es ist die Welt des allgemeinen Wissens und Könnens, „die durch die Lehrer und die Schulbücher repräsentiert wird" (GALLIN und RUF, 1998, S. 23).

[22] Einen vergleichbaren Zugang beschreibt die Vanderbilt-Gruppe (1992, 1993), die 1992 den Ansatz der „Anchored Instruction" entwickelte, bei dem die Schülerinnen auf Basis von fallbasierten Geschichten auf Video zunächst Problemstellungen finden mussten, um diese anschließend in Gruppen zu lösen. Die videobasierten Anker stellten Probleme dar, die zum einen vielfältige und lebensnahe Situationen präsentierten, und zum anderen stark motivierten die gegebenen Problemstellungen zu lösen. Eine Schwierigkeit dieses Ansatzes liegt in der Dekontextualisierung des situierten Wissens. Die gewünschte Nähe von Lern- und Anwendungssituation erschwert den Transfer der erlangten Fähigkeiten.

> *seine unkonventionellen und verschlungenen Wege und Irrwege zu Händen des beratenden Lehrers zu dokumentieren.*" (ebd., S. 24)

Die Lehrerin muss daher die Umsetzung bzw. Übersetzung ihrer eingebrachten Kernideen in Vorstellungen auf Seiten der Schülerinnen nachvollziehen und sich auf das von den Schülerinnen konstruierte Wissen einlassen. Die Vorstellungen der Schülerinnen lassen sich ebenfalls als Kernideen bezeichnen, so dass in diesem Konzept, anders als bei RUF und GALLIN, zwischen Kernideen von Lehrerinnen und Kernideen von Schülerinnen unterschieden wird. Dies ist eine sinnvolle Differenzierung, da Kernideen immer einen singulären Standpunkt repräsentieren. Auf der einen Seite stehen die den Lernprozess anregenden Kernideen der Lehrerin und auf dieser aufbauend die Kernideen der einzelnen Schülerin. Die Intentionalen Probleme bilden die Gelenkstellen zwischen diesen beiden Perspektiven.

Die von der Lehrerin eingebrachten Fragestellungen oder Probleme müssen über die in K1-5 genannten Merkmale alle aus der Sicht des regulären Wissens notwendigen Aspekte und Grundvorstellungen des Gebietes enthalten, so dass die Schülerinnen eine ehrliche Chance besitzen, nicht nur dem Problem entsprechende, sondern auch den curricularen Ansprüchen gerecht werdende viable Begriffe zu „erfinden". Damit bewegt man sich deutlich in einem Bereich, der durch den Stoff und die Intention der Lehrperson geprägt ist und sicher nicht konstruktivistisch ist, sondern das Ziel verfolgt, instruktiv und motivierend auf die Schülerinnen zu wirken. Lerninhalte im engeren Sinn können weder von den Schülerinnen noch von der Lehrerin in Frage gestellt werden. An dieser Stelle gehen gesellschaftliche Vorgaben offenkundig in die didaktische Konzeption ein.[23]

Diese Phase geht in die zweite Phase über, sobald erste Problemstellungen und Hypothesen formuliert sind und ein Plan zum weiteren Vorgehen erstellt wurde.

2. Phase der Problemlösung und Wissenserarbeitung. In der zweiten Phase werden die Hypothesen überprüft, es werden Lösungsideen diskutiert und Lösungen entwickelt. Die Wissenslücken werden aufgearbeitet und konkrete Problembearbeitungen werden zu allgemeinen Lösungsansätzen oder Begriffen abstrahiert. Diese Phase muss nicht allein im Kurszimmer stattfinden, sondern richtet sich nach den Erfordernissen, die beispielsweise die Materialbeschaffung an die Schülerinnen stellt. Auch in dieser Phase wird in kooperativen Strukturen gearbeitet, die jedoch nicht starr sein müssen, sondern je nach Anforderungsniveau dynamisch sein können, z.B. in Form von wechselnden Gruppenbesetzungen.

Während dieser zweiten Phase ist es möglich, Zwischenergebnisse zu präsentieren, besonders große kognitive und affektive Hindernisse[24] mit allen zu diskutieren u.ä. Die Zielperspektive dieser Phase besteht darin, die Probleme so weit bearbeitet zu haben, dass anhand der Präsentation der Lösungen eine gemeinsame Diskussion und Begriffsbildung möglich ist.

Diese Phase ist neben den singulären auch durch divergierende Positionen[25] geprägt. Zentral ist jedoch, dass die Erarbeitung und der damit verbundene Erkenntnisgewinn den Merkmalen K1 - 12 genügen. Die Lehrerin ist insoweit gefordert, dass sie den Schülerinnen

---

[23] Eine tiefergehende Diskussion der Lerninhalte soll hier nicht erfolgen. Ich gehe davon aus, dass der hier beschriebene Ansatz innerhalb der institutionellen Rahmenbedingungen umzusetzen ist, was in diesem Fall bedeutet, dass ein bestimmter Inhaltskanon als vorgegeben angenommen wird.

[24] Vgl. auch VOM HOFE (1998). Er hat am Beispiel des Grenzwertbegriffs eine *genetische Begriffsbildung mit Hindernissen* entwickelt. (vgl. auch SIERPINSKA, 1992).

[25] Divergierende Positionen entstehen aus Vergleich und Diskussion von singulären Positionen. Das kann zur Integration von Neuem und Neuorganisation und Differenzierung der eigenen Strukturen führen.

hilft, nicht zu weit in mögliche Sackgassen zu laufen und dabei ihre Hilfestellung rein prozessorientiert gestaltet.

3. Phase der Präsentation und der gemeinsamen Reflexion. In dieser Phase verständigen sich die Schülerinnen im Klassenverband über ihre Ergebnisse. Anregungen werden aufgenommen, die verwendete Sprache wird ausgehandelt und allgemeine Begriffe werden gemeinsam definiert. So bilden die Schülerinnen in einem der Gruppe übergeordneten sozialen Kontext die zur Lösung der Problemstellungen viablen Begriffe. Diese werden mit den Begriffsbildungen der anderen Gruppenmitglieder verglichen und gegebenenfalls umgestaltet. Im Rahmen weiterer Problemstellungen werden diese Begriffe spiralförmig modifiziert und exaktifiziert. Dabei ist es möglich, dass sich Begriffe in der Rückschau als falsch, aber für den Begriffsbildungsprozess als äußerst ergiebig erweisen können. Der Begriffsbildungsprozess reißt somit niemals ab und ist nur solange tragfähig, wie die Schülerin nicht auf eine Situation trifft, in der der Begriff nicht nützlich ist.

Diese Phase kann bei abschließender Behandlung des Problems mit einem neuen Problem wieder in Phase 1 münden. Es wird jedoch auch vielfach so sein, dass Lösungen modifiziert werden müssen und in einer weiteren Phase 2 bearbeitet werden. Da die einzelnen Phasen immer wieder neu durchlaufen werden, bilden sich tragfähige Begriffe an einzelnen Beispielen heraus und werden mit jedem Durchlauf zunehmend stabilisiert und abstrahiert.

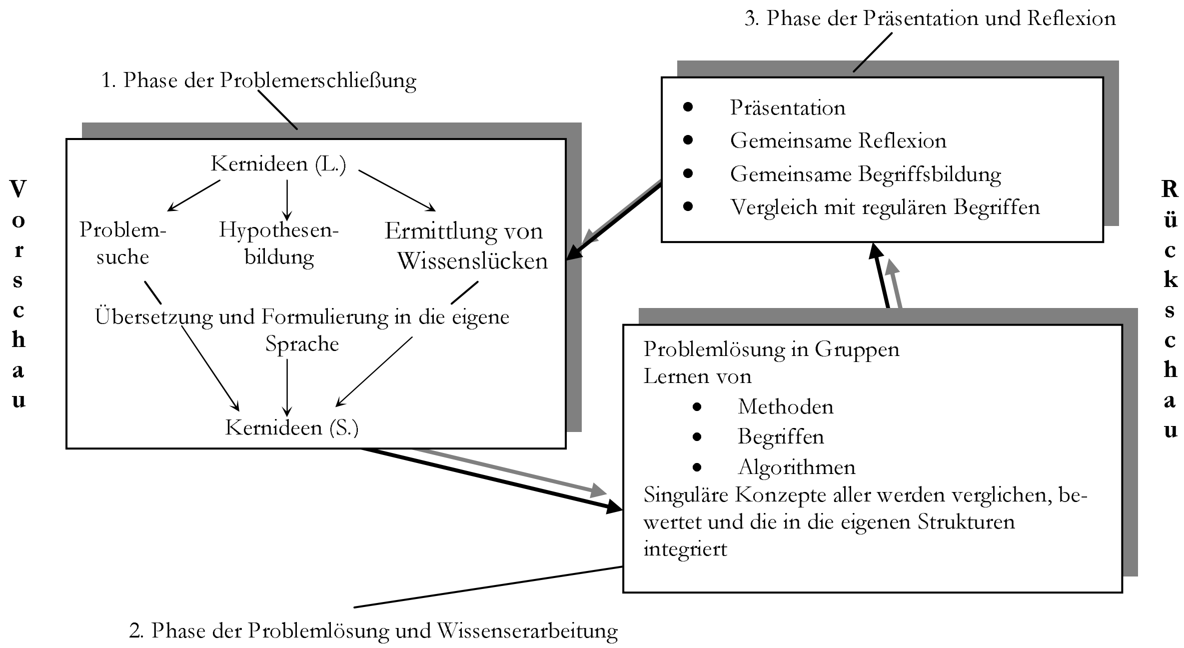


Abbildung 1.1. Die Phasen in KLIP

Am Ende dieser Phase, wenn alle aufgeworfenen Probleme soweit bearbeitet wurden, dass keine weiteren Perturbationen auftreten, stellt die Lehrerin entlang der Begriffsbildungsprozesse der Schülerinnen das reguläre Wissen vor. Dies dient dazu, dass die Schülerinnen ihren individuellen Begriffsbildungsprozess reflektieren können und dass sie die Begriffe kennen lernen, die üblicherweise in der mathematischen Gemeinde verwendet werden.

Aus dem bisher Gesagten wird die zentrale Funktion der Kernideen in diesem Unterrichtskonzept deutlich. Bei der Begriffsbildung kommt ihnen eine grundlegende Bedeutung zu. Deswegen wird im Folgenden der Begriff der Kernidee noch deutlicher herausgearbeitet.

KAPITEL II

2 Kernideen, Kernschema und Forschungshefte

2.1 Kernideen zu Beginn des Problemlöseprozesses

„Es muss sich für den Schüler hier und jetzt lohnen, sich mit dem Schulstoff zu befassen. Nicht äußere Reize wie gute Noten oder lohnende Berufsaussichten dürfen ausschlaggebend sein, sondern die Erfahrung, dass die Beschäftigung mit Zahlen, Wörtern, Pflanzen oder Tönen sinnvoll ist und Befriedigung verschafft, auch wenn man sich anstrengen muss." GALLIN & RUF, 1998, S. 140

Die meisten Schulbücher sind so konzipiert, dass zu Beginn eines Themas einfache Spezialfälle stehen, die in kleinen Schritten zu den allgemeinen Fällen führen. Das suggeriert die Vorteile, dass Lernerfolge scheinbar linear verlaufen und für die Lehrende zur jeder Zeit überprüfbar sind. Durch die Sequenzierung des Stoffes werden Klippen umschifft und Übungsaufgaben lassen sich auf die Abarbeitung von Kalkülen reduzieren. Oft beklagter Nachteil ist die hohe Vergesslichkeit der Schülerinnen. Das liegt daran, dass die Schülerinnen nicht wissen, in welchem Kontext ihr Wissen steht und dass sie das Thema nicht als Ganzes erfassen können.

Eine Marathonläuferin beispielsweise erreicht ihr Ziel nur dadurch, dass sie um die Länge der ganzen Strecke weiß. Jede Schwierigkeit auf dem Weg wird sie im Wissen um alle Situationen, die noch kommen können, meistern. Eine Läuferin, die zwar sehr gut *1000 m* läuft und diese auch mehr als 100 mal gelaufen ist, wird dennoch eine Aneinanderreihung von vielen *1000 m* zu einem Marathon nicht bewältigen, da sie keine Idee vom Wesentlichen oder Kern des Marathons hat. Dazu ist es natürlich notwendig auch *1000 m* mehrmals hintereinander zu laufen, Geschwindigkeits- und Bergläufe zu trainieren, aber unverbunden nebeneinander führt keine Trainingseinheit zum Erreichen des Gesamtziels.

Stellt man sich die Schülerin als Läuferin und die Lehrerin als Trainerin vor, wird deutlich, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen Schülerin und Lehrerin in ihrem Standort bezüglich des Inhaltes des Mathematikunterrichts liegt. Dieses schon beschriebene Spannungsfeld von Vorschau und Rückschau wird an den Punkten, an denen ein neues Stoffgebiet erschlossen werden soll, besonders deutlich. Es ist entscheidend, ob die Schülerin von dem ihr Dargebotenen angesprochen wird und einen Zusammenhang zu sich selbst feststellt. Sie darf *nicht* vom Inhalt erdrückt werden und er darf ihr *nicht* als eine schier endlose Aneinanderreihung kleiner, unzusammenhängender, immer schwerer werdender Sequenzen erscheinen. Denn so wird der individuelle Standpunkt und damit das Interesse jeder Schülerin schnell vom Anspruch der Objektivität des allgemeinen Standpunktes aufgesogen.

An dieser wichtigen Stelle des ersten Kontakts mit dem neuen Inhalt ist es die Aufgabe der Lehrerin der Schülerin eine Tür zum Neuen zu öffnen, so dass das gewonnene Blickfeld ihr ermöglicht, wesentliche und zentrale Aspekte zu erfassen. Dieses Wesentliche und Zentrale sollte sich dadurch auszeichnen, dass es das Ganze in seiner Grobstruktur umreißt. Die Grenzen des Stoffgebietes müssen erkennbar sein. Lernen wird damit kein Prozess nach Außen, bei dem die Lehrperson das Stoffgebiet kontinuierlich vergrößert, sondern ein Prozess nach Innen, bei dem die Schülerin die Details und verschiedenen Facetten des Ganzen aufbauend auf ihren Vorerfahrungen und subjektiven Erwartungshaltungen und Interessen selbsttätig erkennt. Unter solchen Zugängen, Fenstern oder Orientierungshilfen verstehe ich die oben benannten Kernideen.

Ist es gelungen, die Schülerinnen zu motivieren, sich mit dem Problem auseinander zu setzen und eine Kernidee zu entwickeln, kann sie durch ihre Tür treten und das neue Gebiet in selbstgewählter Richtung und Geschwindigkeit erschließen. Da Vertrauen zu neuen Umgebungen erst aufgebaut werden muss, ist es ratsam, die ersten Schritte oder auch den ganzen Weg gemeinsam mit anderen zurück zu legen. Für den Unterricht bedeutet dies die Favorisierung von Gruppenarbeit vor allen anderen Sozialformen. Innerhalb der Gruppe ist es natürlich, soweit erforderlich oder gewünscht, möglich, auf alternative Sozialformen zurückzugreifen.

Wie aber findet man Problemstellungen, die zum Handeln motivieren, die verschiedene Richtungen der Problemerschließung ermöglichen, die zu Kernideen der Schülerinnen werden und die das Stoffgebiet hinreichend gut repräsentieren? Die Orientierungshilfen der segmentierenden Didaktik erfüllen diese Kriterien nicht. Sie geben Antworten, zu denen die Fragen der Schülerinnen oft fehlen. Gegenwärtig ist es in den Schulen meist so, dass die Fragen von den Lehrerinnen gestellt werden, deren Sinn und damit deren Legitimität von den Schülerinnen oft nicht nachvollzogen wird bzw. überhaupt nicht nachvollzogen werden kann. Also lernen sie die rezeptiv „gelernten" Antworten auswendig, um sie in der nächsten Leistungsabfrage gemäß des von der Lehrerin gesetzten Anspruchsniveaus ordnungsgemäß „aufzusagen". Doch erst wenn man eine Frage *selbst* gestellt hat, kann man Frage und Antwort verstehen. Ganz in der Tradition des sokratischen Gesprächs sagt GADAMER, dass erst im Kontakt zum Nichtwissen das Wissen seinen Sinn bezieht (GADAMER, 1965, S. 344). Im Sinne der Mäeutik (PLATON, 1988) hilft die Lehrerin den Schülerinnen ihre Wissenslücken zu entdecken. „In Kerniden verschmelzen objektive Momente eines allgemein bekannten Sachverhalts mit subjektiven Momenten einer aktuellen, affektgeladenen und parteiischen Wahrnehmung dieses Sachverhalts" (GALLIN & RUF, 1998, S. 32).

Aber lassen sich Gefühle der einzelnen Schülerin, bestimmte Situationen o.ä. im Voraus bestimmen? Vermutlich nicht. Auch wenn wir unsere Schülerinnen sehr gut und über Jahre kennen gelernt haben, lässt sich nicht für jede Schülerin das „ideale" Problem finden.

Darüber hinaus müssen die Intentionalen Probleme als Bindeglied zwischen den Kernideen der Lehrerinnen und der Schülerinnen beide angemessen repräsentieren. Die Kernideen auf Seiten der Lehrerin sollten das eigene Interesse an dem Wissensgebiet widerspiegeln, denn nur eine von der Mathematik begeisterte Lehrerin vermag ein Interesse bei den Schülerinnen anstoßen. Folglich muss die Lehrerin in einem ersten Schritt für sich formulieren, was sie in einem bestimmten Sachgebiet fasziniert und was ihr besonders charakteristisch erscheint. In einem zweiten Schritt stellt sie fest, was im Rahmen der institutionellen Gegebenheiten für ihre Schülerinnen interessant und von Bedeutung sein könnte. Auf dieser Grundlage entstehen singuläre Kernideen, die die Schülerinnen zu Fragen an den Stoff und zu individuellem und selbsttätigem Handeln anregen können. Die daraus entstehenden Problemstellungen sollten die zentralen Grundvorstellungen und Aspekte einer Wissensdomäne enthalten. Das verlangt von der Lehrerin eine intensive Beschäftigung mit den fachlichen und didaktischen Hintergründen des Stoffes[26]. Eine Problemstellung sollte darüber hinaus mehrere Zugänge zu ihrer Bearbeitung enthalten. Da jedoch das zu erschließende Gebiet zugleich hinreichend komplex sein soll und damit auch unterschiedliche sich nicht bedingende Zugänge und Aspekte enthält, reicht im Normalfall *eine* Problemstellung nicht aus, sondern man benötigt mehrere Probleme. Die Anzahl der Probleme sollte aber zugleich möglichst gering sein, so dass die Schau auf das neue Gebiet hinreichend repräsentiert wird. Diese einzelnen Problemstellungen enthalten die Grundvorstellungen der jeweiligen Begriffe, das sind für mich die essentiellen Aspekte eines Begriffes, sie fokussieren aber ebenso einzelne Aspekte des Sachgebietes in besonderer Weise.

Ob diese in den Intentionalen Problemen verarbeiteten Kernideen nun wirklich geeignet sind, oder anders formuliert in der gegebenen Lernsituation für die gegebene Lerngruppe viabel sind, lässt sich erst aus ihrer Wirkung auf die Schülerinnen erschließen. Diese müssen für sich einzeln und durch das Gespräch in der Gruppe tragfähige Kernideen entwickeln. Das können zum Beispiel Fragestellungen, erste Überlegungen oder auch Hypothesen sein. Ideen lassen sich zu Beginn des Lernprozesses viele formulieren, was davon jedoch Kernideen sind, zeigt sich erst in der Rückschau und zwar in der Rückschau der einzelnen Schülerin. Das bedeutet natürlich auch, dass sich Kernideen im nachhinein als falsch erweisen können.

Damit die Lehrperson nicht zu viele bzw. immer weniger Fehlschläge in der Bereitstellung ihrer Problemstellungen erlebt, ist es wichtig, dass sie die Lernbiographien der Schülerinnen eingehend studiert und ein Gefühl für die Bedingungen, unter denen Kernideen entstehen, gewinnt. Dies erfordert die Bereitschaft auf Seiten der Lehrerin, der Schülerin zuzuhören und damit ihre spezielle Sprache verstehen zu wollen. Die Lehrerin „muss sich [...] in die Fragen einzuleben versuchen“ (Gallin & Ruf, 1998, S. 40), die die Schülerinnen stellen. Da die singuläre Sprache in der Regel nicht annähernd der Fachsprache gleichkommt, kann dies sehr viel Geduld und Anstrengung von der Lehrerin erfordern. Um dies möglichst umfassend zu leisten, kommt neben der sprachlichen Auseinandersetzung dem Verfassen und Verstehen von Texten im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle zu. Die zentralen Kriterien für Kernideen sind in der nachfolgenden Übersicht zusammengefasst.

[26] Diese Beschäftigung wird im Regelfall mehr Zeit in Anspruch nehmen als es für einen sequentiellen Zugang notwendig wäre, da nun nicht nur zwei bis drei abgesteckte Wege geplant werden müssen, sondern auch die Struktur des Gebietes zwischen den Wegen bekannt sein sollte, so dass die Lehrerin in der Lage ist, neue durch die Schülerin erbaute Wege zu beurteilen.

Tabelle 2.1. Kriterien für Kernideen aus der Sicht der

Lehrerinnen	**Schülerinnen**
Kernideen • sollen einen Blick auf das Ganze bereit stellen; • geben den Schülerinnen Orientierungshilfen; • sollen zum Handeln motivieren; • sind singuläre Ideen der Lehrperson, die aus dem Spannungsfeld Vorschau-Rückschau entstehen; • stecken das Gebiet ab und rufen singuläre Kernideen und Fragen bei den Schülerinnen hervor; • sollen die Interessen der Lehrperson widerspiegeln; • lenken die Aufmerksamkeit der Schülerinnen auf ein bestimmtes Sachgebiet des Unterrichts; • stellen sich ein, wenn Lehrerinnen und Inhalt in Beziehung treten.	**Kernideen** • verbinden die singuläre Welt der Schülerinnen und die reguläre Welt des Inhalts; • sind Produkte von Gesprächen; • machen auf Nichtwissen oder falsches Wissen aufmerksam und führen zu Akkomodation neuen Wissens; • basieren auf der persönlichen Motivation, die durch die Beschäftigung mit einer Sache entsteht; • hängen von der jeweiligen Situation ab; • stellen sich ein, wenn Schülerinnen und Inhalt in Beziehung treten; • können sich aus der Sicht der Rückschau als falsch, aber dennoch als sehr fruchtbar erweisen.

2.2 Kernschema und Kernideen während des Problemlöseprozesses

Auf dem Weg in das neue Gebiet können die zuerst als Orientierung dienenden Kernideen durch individuell oder auch sozial bedingte Prozesse revidiert und modifiziert werden. Erste Fragen und Hypothesen erweisen sich als nicht viabel, neue Sachverhalte ziehen das Interesse der Schülerin auf sich, aber auch Hindernisse und divergierende Vorstellungen innerhalb der Gruppe wirken auf die Gestaltung der Kernideen ein. So werden alte Kernideen verworfen und neue Kernideen entstehen. Aus Fragen bilden sich Antworten, aus Hypothesen werden „Gewissheiten", aus dem Konkreten wird das Allgemeine abstrahiert, es werden Sätze und Definitionen formuliert. Die Kernideen der einzelnen Problemstellungen werden verwoben und es entwickeln sich übergreifende Kernideen. Aus ihnen entstehen problemabhängige Begriffe und daraus wiederum problemunabhängige Begriffe. Aus diesen Transponierungprozessen entwickelt sich ein kognitives, affektives und auf die Gruppe bezogen auch soziales Schema des Wissensaufbaus. Dieses Schema enthält die einzelnen Zustände und den Prozess der subjektiven und sozialen Konstruktionen. Die Zustände lassen sich exemplarisch als die Kernideen und die aus ihnen entstehenden Begriffe, Regeln und Beispiele beschreiben. Unter dem Prozess der Begriffsbildung verstehe ich die gerichteten Relationen der Zustände, das sind die viablen Implikationen und Verallgemeinerungen, die Aha-Erlebnisse im Erkenntnisprozess, aber auch die Wissenslücken und die Irrwege. Da dieses Schema auf der Grundlage von Kernideen durch die Bearbeitung der Probleme zum Kern der Begriffe eines Wissensgebiet führt und alle weiteren Erkenntnisse aus diesem Schema wieder abgeleitet werden können, nenne ich es *Kernschema.*

Das Kernschema ist ebenso wie die Kernideen abhängig von der jeweiligen Schülerin oder der jeweiligen Lerngruppe. Es beschreibt den Prozess vom Problem zum Begriff und die zentralen methodologischen Gesichtspunkte des jeweiligen Gebietes und des Wissensaufbaus. Es enthält die subjektiven Angelpunkte des Begriffsbildungsprozesses und soll deswegen im Kapitel zur konstruktivistischen Begriffsbildung noch einmal näher untersucht werden (vgl. Kapitel 3).

2.3 Forschungshefte

Kernideen der Schülerinnen geben die Richtung ihres Forschungsinteresses vor, Kernschemata beschreiben die Struktur und Organisation des Wissensaufbaus. Beide sind damit grundlegend für den gesamten Lernprozess. Ausgehend von einer singulären Kernidee der Lehrerin werden sie in gemeinsamen Gesprächen und in der individuellen Auseinandersetzung mit dem Stoff gewonnen. Das Verständnis einer Sache kann aber allein durch die Sprache sehr vage bleiben, da sich die Schülerin weitgehend in der Position der Vorschau befindet. Erst die schriftliche Fixierung der Kernideen, ihrer Hypothesen, der Irrwege, der erfolgreichen Lösung usw. eröffnet der Schülerin den Zugang zu einer Metaebene des Lernprozesses, auf der sie ihren individuellen Lernweg reflektieren kann. In dieser Rückschau kann sie gegebenenfalls ihre Umwege erkennen und für zukünftige Handlungen fruchtbar machen.

In den Forschungsheften werden singuläres und reguläres Wissen, Hypothesen, Nachforschungen, Fehler, Gefühle[27] u.a. schriftlich festgehalten. In der individuellen Auseinandersetzung der Schülerin mit dem Stoff ermöglicht die Verschriftlichung eine „Entschleunigung" des Denkens und des Fühlens und schafft damit eine stärkere Anbindung an den Stoff. Die Schülerin muss ihre vagen Vorstellungen von mathematischen Sachverhalten und Begriffen in Worte fassen, die aus ihren alltagssprachlichen Mehrdeutigkeiten gelöst werden und ausgehend von einem konkreten Zusammenhang durch die Verbindung mit anderen Worten zu einem Satz oder einer Definition zunehmend die Schärfe eines eindeutigen, abstrakten mathematischen Begriffs gewinnen. Nach WITTENBERG (1963) ist Mathematik ein „Denken in Begriffen". Im konstruktivistischen Kontext des Schulunterrichts bedeutet das, dass die Schülerinnen die Begriffe erst einmal selbst definieren, diese Begriffe in der Lerngruppe abgleichen und einen gemeinsamen Begriffsapparat entwickeln, den sie zum Abschluss mit den regulären Begriffen vergleichen. Das ist notwendig, da zur Verständigung über Mathematik mit anderen Menschen über den Klassenraum hinaus die von der mathematischen Gemeinde gebrauchten Begriffe unabdingbar sind. Im Gegensatz zur üblichen Begriffsfestsetzung durch die Lehrerin sind die Schülerinnen nun in der Lage durch die Einnahme eines individuellen Standpunkts die Sinnhaftigkeit des regulären Begriffs zu würdigen bzw. diesen zu hinterfragen. Zudem wird der Lehrerin und den Schülerinnen ermöglicht auf der durch die fortwährende Auseinandersetzung mit den definierten Begriffen installierten Metaebene in einen Dialog mit und über Mathematik einzutreten und diesen genau zu verfolgen.

Dieser Dialog bzw. das Wechseln von einer Ebene auf die andere, ist zugleich ein Perspektivwechsel von Vorschau und Rückschau. Dabei werden den Begriffen durch Ordnen, Unterscheiden, Vernetzen und Koordinieren fortschreitend immer mehr Eigenschaften des Konkreten bzw. des Kontextes abgezogen, so dass neue Begriffe auf einer höheren Ebene entstehen, die die Differenziertheit der einzelnen Begriffe in der Integration dieses neuen Begriffs aufhebt. Ein solcher Prozess der Abstraktion vereinfacht den Umgang mit der Vielfalt der Begriffe, da er sie verdichtet und die Komplexität reduziert. Im Gegensatz zur heteronomen Abstraktion mathematischer Begriffe in Schulbüchern, führt die Schülerin diesen reflexiven Abstraktionsprozess (vgl. PIAGET 1977b, S. 319 f.) selbst handelnd durch,

[27] Gefühle werden natürlich nur eingetragen, wenn die Schülerinnen dazu ein Begehren verspürt. Niemand **muss** seine Gefühle äußern.

so dass sich der Abstraktionsprozess nun am richtigen Ort vollzieht, nämlich in den kognitiven und affektiven Strukturen des Individuums (vgl. auch Kapitel 3).

In welcher Form und in welchem Umfang die Schülerinnen die für sie nützlichen mathematischen Begriffe erfinden, liegt in ihrem eigenen Ermessen. Vermutlich werden sie jedoch zuerst ihre Alltagssprache heranziehen, da die mathematische Sprache ihnen zwar geläufig ist, sie sich jedoch in den meisten Fällen nicht positiv mit ihr identifizieren können. Ferner wird zu erwarten sein, dass die Schülerinnen sehr schnell ihre selbst entwickelten Begriffe, Symbole und Notationen modifizieren müssen, da diese in der divergierenden Phase Unschärfen aufweisen und bei der Anwendung auf andere Problemfelder nicht umfassend genug oder nicht mehr viabel sein können.

Seit Anfang des 20. Jahrhunderts zeichnet sich der mathematische Formalismus dadurch aus, dass die Klarheit mathematischer Aussagen nicht selten von dem Streben nach Kürze dominiert wird. FREGE, der diese Entwicklung in der mathematischen Sprache beklagt, schreibt dazu:

> *„Wenn wir aber das Zeichen einer Vorstellung hervorbringen, an die wir durch eine Wahrnehmung erinnert werden, so schaffen wir damit einen neuen festen Mittelpunkt, um den sich Vorstellungen sammeln. [...] So dringen wir Schritt für Schritt in die innere Welt unserer Vorstellungen ein und bewegen uns darin nach Belieben, indem wir das Sinnliche selbst benutzen, um uns von seinem Zwang zu befreien. Die Zeichen sind für das Denken von derselben Bedeutung wie für die Schifffahrt die Erfindung, den Wind zu gebrauchen, um gegen den Wind zu segeln. [...] Von ihrer zweckmäßigen Wahl hängt nicht wenig ab.“*
>
> FREGE (1975, S. 95) zit. nach SJUTS (1999, S. 134)

Inwieweit Schülerinnen nun selbst eine möglicherweise nach Kürze strebende mathematische Sprache entwickeln wird sich zeigen. Zumindest bietet diese Art der Verschriftlichung eine Chance zum Abbau eines heteronomen Formalismus in der Schulmathematik, der mit dem Streben nach Kürze und Kompaktheit der mathematischen Sprache einhergeht. Die sinnliche Erfahrung, von der FREGE spricht, lässt sich so nicht nur auf wissenschaftlichem Niveau, sondern schon im Unterricht erfahrbar machen. Die Schülerinnen können die Orientierungsfunktion einer Fachsprache im eigenen Forschungsprozess erleben.

Damit nicht durch die Hintertür doch wieder Formalismen in den Mathematikunterricht Einzug finden, ist es notwendig, dass die Forschungshefte *nicht* auf sprachliche Korrektheit geprüft oder korrigiert werden.[28] Eine Korrektur würde bei vielen Schülerinnen dazu führen, dass sie lieber nichts schreiben, als es falsch zu schreiben. Sie schreiben in erster Linie für sich und in zweiter Linie schreiben sie für andere. Es ist jedoch wichtig, dass die Schülerin ihren Gedankengang für andere verständlich darlegen kann. Diese Verständlichkeit soll durch eine einheitliche Struktur der Hefte unterstützt werden. Das erleichtert erheblich ein Zurechtfinden in den Gedankengängen anderer und gibt den Schülerinnen eine methodische Hilfe an die Hand, die beim ersten Einsatz von Forschungsheften sinnvoll erscheint. Ich habe für dieses Projekt[29] folgende strukturgebenden Aspekte verwendet:

1. **Thema**
2. **Problemstellung**
3. **Erste Überlegungen**
4. **Tatsächliches Vorgehen**
5. **Verallgemeinerungen**
6. **Anmerkungen**

[28] Sollten einzelne Schülerinnen eine derartige Korrektur als förderlich und sinnvoll empfinden, wird sie natürlich durchgeführt.

[29] Die Kriterien für ein Forschungsheft sind altersabhängig. Es ist klar, dass ein beispielsweise achtjähriges Kind nicht zu einer derartigen differenzierten Beschreibung des eigenen Lernprozesses in der Lage ist.

Das Thema ist vorgegeben. Die Problemstellungen basieren auf den zur Verfügung gestellten Aufgaben und werden, soweit innerhalb der Aufgabenstellung nicht anders gefordert, von den Schülerinnen entwickelt. Die ersten Überlegungen beinhalten mögliche Fragen und Wissenslücken, Vermutungen und den Plan zum weiteren Vorgehen.[30] Das tatsächliche Vorgehen enthält Lösungsideen, Lösungen, Beispielaufgaben, Aha-Erlebnisse, gemachte Fehler und Wissenslücken. Die Verallgemeinerungen sollen die im Konkreten entwickelten Begriffe auf eine abstraktere Ebene heben, die auch die Bearbeitung anderer Problemstellungen ermöglichen. Ferner sollen die Schülerinnen das eigene Vorgehen reflektieren, was beispielsweise bedeutet, dass der eigene Standort und offene Fragen bestimmt werden. Unter den letzten Punkt, die Anmerkungen, fallen alle anderen wichtigen Anliegen der Schülerin.

Die Aspekte sollen der Schülerin eine Orientierung zur Führung eines Forschungshefts geben. Sie müssen nicht mechanisch abgearbeitet werden, sondern die Schülerin bestimmt selbst an welchen Stellen sie welche Schwerpunkte setzt. Die wichtigsten Kriterien für ein „gutes" Forschungsheft sind Vollständigkeit, Darstellung, Kreativität, Fehlerbearbeitung und Schlüssigkeit der Argumentation. Das Bewertungsschema wird so von der Eindimensionalität der Lernzielorientierung um eine zweite Dimension der Lernprozessorientierung erweitert. Am Lernprozess ist für mich der Umgang mit Fehlern zentral. Gemachte Fehler weisen die Schülerin auf Wissenslücken. Das schriftliche Festhalten von Fehlern und die Entwicklung von Strategien, diese zu beheben und nicht zu wiederholen, ist zentraler Bestandteil von konstruktivistischem Lernen. Denn gerade die Perturbationen, die Situationen, in denen wir erkennen, dass unsere vorhandenen Strukturen nicht zur Problembeseitigung ausreichen, bereichern unser Wissen. In der Rückschau sind diese Perturbationen oder Hindernisse zudem Gelenkstellen des Lernprozesses, da sie weiterhin existieren und nicht, wie in einem „guten" Tafelbild, wieder weggewischt werden.

„Fehler machen" ist sowohl ein individuelles als auch ein soziales Phänomen. Analog zu der Fragestellung, ob die individuellen oder die sozialen Konstrukte maßgeblich für den Erkenntnisgewinn sind, könnten die Schülerinnen sowohl individuelle als auch gruppenspezifische Forschungshefte führen. HESKE (1998) z.B. verwendet in seinem Unterricht *ein* Forschungsheft pro Gruppe. Dieses Heft wird neben den üblichen Schulheften geführt. Die Mitglieder einer Gruppe halten abwechselnd in eigenen Worten die Stundenergebnisse fest. Zusätzlich werden Arbeitsergebnisse und offene Fragen notiert. Verantwortlich für jede Eintragung ist das ganze Team. Gegen ein solches Vorgehen spricht, dass nicht immer alle Schülerinnen das Heft zur Verfügung haben. Ferner werden die Schülerinnen durch die Absprache mit den anderen Schülerinnen schon vor der Niederschrift zum Aushandeln genötigt. Der wesentliche Aspekt der kontinuierlichen Anbindung und Näherung an den Stoff wird damit für die Schülerinnen verhindert und die Phasen des Singulären und des Divergierenden verschwimmen zu einer Phase. Ferner besteht die Gefahr, dass einige Schülerinnen sich aus der Verantwortung herausschleichen und so zu keiner Zeit ihre Auseinandersetzung mit dem Stoff eigenständig verschriftlichen. Gegen den Ansatz, ein Forschungs- und ein Schulheft zu führen, spricht neben dem enormen Arbeitsaufwand für die einzelne Schülerin die Tatsache, dass das Forschungsheft vermutlich nicht immer verfügbar und damit für weite Teile des Unterrichts vollkommen nutzlos ist. Zudem lässt sich die Genese des Gruppenwissens sehr gut an den Gemeinsamkeiten der Forschungshefte der einzelnen Gruppenmitglieder ablesen. All diese Gründe haben mich dazu bewogen jede Schülerin *ein* eigenes Forschungsheft führen zu lassen.

[30] Es muss nicht jedes Problem im Forschungsheft bearbeitet werden.

Die Forschungshefte werden von der Lehrerin und anderen Schülerinnen regelmäßig gelesen. Das dient auf Seiten der Lehrerinnen dazu, den Lernprozess der einzelnen Schülerinnen verstehen und bewerten zu können. Auf Seiten der Schülerinnen lassen sich beispielsweise Entwicklungsprozesse einer versäumten Stunde nachbereiten und fachliche Missverständnisse bzw. unklare Sachverhalte mit Hilfe anderer Perspektiven beseitigen. Dies initiiert ein Zusammenspiel zwischen singulären Schülerinnenvorstellungen und Unterrichtsprozess.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Forschungsheft innerhalb des dargestellten Unterrichtskonzeptes ein wichtiges Instrument für konstruktivistisches Lernen ist. Im Forschungsheft „stellt der Lernende dar, wo er steht, was ihn bewegt, was er kann und wo seine nächsten Probleme liegen“ (GALLIN & RUF, 1998, S. 141). Die Schülerin zeichnet mit Wort und Bild eine Landkarte des Gebietes rund um ihren Lösungsweg, welche ihr erlaubt auf Grundlage der skizzierten eigenen Wege zur Problemlösung und im Vergleich mit den Wegen ihrer Mitschülerinnen geeignetere Lösungswege und abstrahierte Begriffe zu entwickeln. Der Gegenüberstellung mit den regulären Karten am Ende ihrer Bemühungen wird die Schülerin in ihrem Handeln bestätigen oder zu weiterer Reflexion und Abstraktion anhalten.

KAPITEL III

3 Konstruktivistische Begriffsbildung

„Begriffsbildung ist ein Akt unseres Denkens, in dem Abstraktion und Konstruktion eine Einheit bilden.[...] Ein Unterricht, in dem Mathematik entwickelt werden soll, wird daher versuchen den Schülerinnen Mathematik von den Begriffen her zu erschließen."

(VOLLRATH, 1984, S. 19)

Versteht man Abstraktion als Teil der Rückschau und Konstruktion als Teil der Vorschau scheinen die Gedanken von VOLLRATH dem hier beschriebenen Vorgehen zu entsprechen. Ob die zu Beginn dieser Arbeit nach WITTENBERG skizzierte Charakterisierung von Mathematik als ein Denken in Begriffen die Schlussfolgerung zulässt, dass Mathematik von den Begriffen her zu erschließen ist, soll hier diskutiert werden. Die gängigen Theorien zur Begriffsbildung von AUSUBEL, BRUNER und PIAGET werden hier im Einzelnen nicht dargestellt. Es werden aber an einigen Stellen zentrale Gedanken aus diesen Arbeiten aufgegriffen.

3.1 Fünf Prinzipien konstruktivistischer Begriffsbildung

Unter Lernen wird in dem vorliegenden Konzept konstruktivistisches Lernen verstanden, d.h. wie oben schon ausgeführt, dass Wissen nicht rezeptiv erworben, sondern konstruktiv in realistischen und komplexen Problemsituationen erzeugt wird. Im Kontext der Schule startet dieser Konstruktionsprozess mit der Bildung von Kernideen, aus denen im Verlauf des Forschungsprozesses bereichsspezifische und subjektive bzw. sozial bedingte Kernschemata erwachsen. Die Kernschemata enthalten die Prozesse der Begriffsentwicklung von der ersten bis zur letzten Kernidee. Das darin enthaltene Wissen wird in Begriffen und Regeln gekapselt. [31] Diese werden durch individuell geführte Forschungshefte dokumentiert und reflektiert.

Die Kernideen und Forschungshefte gewähren den Schülerinnen einen breiten Handlungsspielraum. Beschränkt ist dieser Raum jedoch, neben den physisch und sozial erfahrbaren Grenzen, durch den institutionellen Rahmen von Schule. Hinsichtlich der Bildung von Wissen im Mathematikunterricht, also der Begriffsbildung, bedeutet das zum Beispiel, dass der Zuwachs von Wissen überprüfbar sein soll. Üblicherweise orientieren sich die zu Überprüfung notwendigen Lernerfolgsprüfungen an außerhalb der Erkennenden a priori gegebenen Objekten. Entsprechend des Grades an Übereinstimmung mit den objektiven Begriffen wird ein Begriffsbildungsprozess als erfolgreich bezeichnet oder nicht. Dieser Zugang basiert auf einem produktorientierten, statischen und normativen Verständnis von Lernen (vgl. VOLLRATH, 1984). Da in dieser Arbeit die Erkennbarkeit objektiver Objekte

[31] Ich werde im Folgenden Regeln der Einfachheit halber unter dem Begriff Begriffe subsumieren.

bezweifelt wird und stattdessen Viabilität des Handelns als Gütemaß für Konstruktionen dient, muss das gängige Begriffsbildungskonzept zu Gunsten eines subjektiven Maßstabes modifiziert werden. Folglich geht es nicht um „richtige“ oder „falsche“ Begriffe, sondern *welche* Begriffe *wie* gebildet werden.

Als weitere Schwierigkeit kommt hinzu, dass Wissen nicht mehr notwendig an ein Individuum geknüpft ist, sondern dass Wissensaufbau zudem sozialen Prozessen unterliegt.[32] Dies bedeutet, dass erfolgreiche Begriffsbildung nicht mehr allein individuell, sondern in Abhängigkeit von der umgebenen Gruppe zu verstehen und zu beurteilen ist.

Da Lernen sich nicht linear vollzieht, können subjektive oder in Kleingruppen vollzogene Viabilitätsprüfungen jedoch erst nach einiger Zeit die Güte der erfundenen Begriffe zeigen. Schule muss hier helfen, trotz subjektiver Begriffskonstruktionen systematisches Lernen zu fördern. Dies kann ihr gelingen, indem sie durch die Person der Lehrerin und in Form der Intentionalen Probleme den Schülerinnen einen systematisch vorbereiten Lernanlass bereitstellt. Hiermit wird der zu erschließende Wissensbereich eingeschränkt, der Begriffsbildungsprozess hingegen bleibt den Schülerinnen überlassen. Dieses erste Prinzip konstruktivistischer Begriffsbildung, Intentionale Probleme an den Anfang zu setzten und Anlass für Kernideen und Kernschemata zu liefern, bezeichne ich als das *Prinzip der Problemorientierung*.

Zur Generierung von Intentionalen Problemen erfordert dieses Postulat der Anknüpfung an Probleme, die alle zentralen Aspekte des neuen Stoffes enthalten sollen, von der Lehrerin das Studium der folgenden Aspekte:

1. Die historische Genese der Begriffe,
2. die epistemologische Genese der Begriffe und
3. die individuellen und sozialen Vorerfahrungen und psychologischen Entwicklungsprozesse, die ein Individuum oder eine Gruppe bei der Begriffsentwicklung durchschreitet.

Berücksichtigt die Lehrerin diese drei Facetten von Begriffsentwicklung, kann sie Probleme entwickeln, die tatsächlich den Schülerinnen die Möglichkeit geben, Begriffe eigenständig und selbsttätig zu entwickeln, Probleme, die sie Phänomene im Unterricht erfahrbar und erlebbar werden lassen und aus denen sich das zu lernende Wissen extrahieren lässt. Eine Forderung an Unterricht, die schon WITTENBERG (1963) und WAGENSCHEIN (1970) als Hauptforderungen an das genetische Lernen gestellt haben.[33] Als charakteristische Merkmale genetischen Lernens bzw. des „genetischen Prinzips“ sieht WITTMANN (1995) u.a. den Anschluss an das Vorverständnis, die Einbettung in größere ganzheitliche Problemkontexte und Begriffsentwicklung als erst konkretes, unscharfes im Verlauf der Problemlösung präziser werdenden Prozess. Legt man diese Charakteristika zu Grunde, so ist konstruktivistische Begriffsbildung auch *genetische* Begriffsbildung. Das schließt aber deutlich die Führung durch die Lehrerin von intuitiven zu strengen Begriffen, wie WITTMANN oder FREUDENTHAL (1973) es beschreiben, aus. Die systematische Berücksichtigung genetischer Prozesse bei der Erstellung der Probleme ermöglicht auch die in tausend Jahren gewachsenen Begriffe für Schülerinnen in angemessener Zeit generierbar zu machen und entspricht der natürlichen Genese der Begriffe.

Wie es während der historischen Begriffsgenese Irrungen und Umwege gegeben hat, so sind diese für einen epistemologischen Erkenntnisprozess ebenfalls typisch. Sie zeigen sich

[32] Vgl. Postulate (3) und (4) in Kapitel 1.1.

[33] Auf das genetische Prinzip wird nur insofern eingegangen, als dass es für das Verständnis der Arbeit notwendig ist. Für eine ausführliche Darstellung verweise ich auf SCHUBRING (1978) und WITTMANN (1995).

als Sichtbeschränkungen, welche durch Überwindung zur allmählichen „Erweiterung des Gesichtsfeldes“ (WITTMANN, 1995, S. 131) führen. SIERPINSKA (1992) nennt diese Hindernisse *epistemological obstacles* und sieht sie als kennzeichnend für den jeweiligen Begriff, wobei es sich nicht um vermeidbare Störungen handelt, sondern um für die Genese des Begriffs zentrale Bestandteile.

> *The very nature of epistemological obstacles is such they cannot be avoided and their role in our thinking is important.*“ (SIERPINSKA, 1992, S. 28)

Diese Hindernisse hängen nach SIERPINSKA nicht von dem einzelnen Individuum oder der jeweiligen Situation ab, sondern „they are common in the frame of some culture, whether present or past and thus seem to be the most objective obstacles to a new way of knowing“ (SIERPINSKA, 1992, S. 27). Sie sind objektiv und allgemeingültig und ein Teil des Wesens des Begriffes. Dadurch gewinnt der Begriff die für ihn charakteristischen Bedeutungen („meanings“).

Verlassen wir auch hier das Paradigma der Annahme einer allgemeingültigen Realität, gewinnen die Überlegungen SIERPINSKAS an Bedeutung für eine konstruktivistische Begriffsbildung. Sie unterstreichen die Forderung, dass Lernprozesse nicht so glatt gestaltet werden sollten, dass sie nur den Begriff und nicht mehr die vor ihm und die durch ihn aufgeworfenen Probleme behandeln. Perturbationen sind ein wesentlicher Bestandteil von Begriffsbildung, sie führen zu Akkomodation und Neustrukturierung unserer Schemata. Die Anspannung[34] und die durch das entsprechende Aha-Erlebnis ausgelöste Freude, die die Geburt einer neuen Erkenntnis begleiten, bringen eine vom Subjekt abhängige besondere Bedeutung des Begriffs hervor, die sich auch im Nachhinein immer wieder rekonstruieren lässt. Diese Bedeutungen sind nicht objektiv, aber sie sind Teil eines „Grundvorstellungskomplexes“ (vgl. VOM HOFE, 1995) des Begriffes.

Der Aufbau dieser Bedeutungen ist der erste Schritt vom konkreten Problemkontext zum abstrakten mathematischen Begriff, vom nicht-mathematischen Erfahrungsbereich zum mathematischen Erfahrungsbereich. Die Notwendigkeit, den Gleichgewichtszustand wiederherzustellen, lässt das Individuum oder die Gruppe auf Grundlage ihrer vorhandenen Schemata[35] einen neuen Begriff *erfinden*. Der Begriff wird zum Werkzeug um sich in der Erlebniswelt mitsamt ihrer Widerstände viabel zu bewegen. Er wird zur Methode, wenn er sich in *verschiedenen* Situationen als tragfähig erweist. Und die Notwendigkeit und Möglichkeit zur Methode ist für die Schülerin die Triebfeder, konkrete Begriffe, oder wissenschaftstheoretisch gesprochen Referenzobjekte, selbsttätig zu abstrahieren. Die Perturbationen und Konstruktionen verbinden den theoretischen Begriff mit dem Referenzobjekt, die den Anlass zu einer verallgemeinerten und theoretischen Begriffsbildung geben.

Damit ist Lernen immer mit schöpferischem Tätigsein verknüpft und der Begriff wird durch den Übergang von konkreter zu abstrakter Erlebniswelt vom Werkzeug zum situationsunabhängigen Wissen. Diesen immer wiederkehrenden Anstoß von Begriffsentwicklung im Spannungsfeld von Perturbation und Konstruktion bezeichne ich als das *Komplementaritätsprinzip*[36] konstruktivistischer Begriffsbildung.

Dieses Prinzip zeigt sich beispielsweise, wenn sich die am Anfang der Problembearbeitung aufgestellten Kernideen und die daraus entstandenen abstrakten Begriffe bei der Interpreta-

[34] SIERPINSKA (1992) nennt „Anspannungen“ *emotional tensions*.
[35] Hier sind die Handlungsschemata im Sinne der strukturgenetischen Erkenntnistheorie PIAGETS gemeint. Hinsichtlicht des Mathematikunterrichts erwachsen diese Handlungsschemata durch Verinnerlichung und Stabilisierung der Kernschemata.
[36] Hinsichtlich des klassischen Komplementaritätsprinzip der Begriffsbildung vgl. z.B. VOLLRATH (1984).

tion bzw. bei der Anwendung im konkreten Problemkontext als nicht passend erweisen, so dass das Problem erneut bearbeitet werden muss, um den Begriffsaufbau erfolgreich fortzusetzen. Bei viablen Kernideen und Kernschemata hingegen werden die entwickelten Begriffe an anderen Problemen stabilisiert bzw. modifiziert. Dies wiederum führt zum Abbau alter und Aufbau neuer Perturbationen, die wiederum zu Begriffsmodifikationen oder neuer Begriffsbildung führen. Zielrichtung ist ein Gleichgewichtszustand von Organismus und Milieu, d.h. vollständige kognitive und affektive Viabilität der individuellen Konstrukte innerhalb der Erfahrungswelt, was natürlich die Viabilität innerhalb der sozialen Realität mit einschließt. Der Prozess der Begriffsbildung ist dabei gekennzeichnet durch ein Streben nach Präzisierung, Eindeutigkeit und Verallgemeinerung. Die Begriffe, die zu „Beginn des Lernprozesses" als Idee oder Zielrichtung in möglichst umfassender, aber heuristischer Form am Beginn des Lernprozesses stehen, gewinnen mit jedem Schritt an Schärfe. Die Lernende vollzieht den Schritt von der figurativen Abstraktion zur operativen Abstraktion[37] oder nach LOCKE (1959) von der ersten Quelle der Ideen, der *sensation*, zur zweiten Quelle, der *reflection*. Durch den nun operativen und reflexiven Charakter können die Ideen und Begriffe abstrahiert werden, da sich der Geist nun den eigenen Operationen zuwendet. Sie können mit bereits bestehenden Schemata verknüpft werden. Die Lernende durchdringt das Wissensgebiet, in dem sie ihre Ideen und Begriffe innerhalb der Kernschemata ausdifferenziert, vernetzt und formalisiert.[38] Deswegen nenne ich das zu Grunde liegende Prinzip das *Prinzip der sukzessiven Exaktifizierung*[39]. Tätigkeiten wie Generalisieren, Spezialisieren, Strukturieren und Analysieren fallen unter dieses Prinzip.

Am Ende eines solchen Lernabschnitts, dann, wenn keine weiteren Perturbationen mehr bestehen und die Begriffe sich als tragfähige Werkzeuge zur Problemlösung erwiesen haben, nimmt die Schülerin hinsichtlich dieses Lernabschnitts die Rückschauperspektive ein. Diese gewinnt sie, indem sie ihren Begriffsbildungsprozess reflektiert und die neu erworbenen Erkenntnisse auf einer Metaebene bewusst zu vorhandenen Strukturen kompatibel macht. In dieser Phase werden die neu entwickelten Begriffe mit vorhandenen Begriffen und die neu entwickelten Schemata mit vorhandenen Schemata verglichen, kombiniert und gegeneinander abgegrenzt, es werden übergeordnete Begriffe entwickelt, indem die schon entwickelten Begriffe weiter abstrahiert werden. Die Lernende stellt operationale Strukturen auf, in denen sie die konkret erfahrenen Ideen zu allgemeinen Ideen abstrahiert. Die abstrakten Ideen können aber ohne den Bezug zum Konkreten nicht sein. Zur Vorstellung allgemeiner, situationsunabhängiger Begriffe wird die konkrete Situation benötigt. Es ist, wie BERKELEY (1710) meint, zur Vorstellung eines Begriffes immer ein besonderes Einzelding notwendig. Seine Schlussfolgerung daraus, es gebe keine allgemeinen Begriffe, ist jedoch falsch, da die *reflection* bei LOCKE oder auch die *réflexion* bei PIAGET eben operative Vorgänge beschreiben. Diese operativen Vorgänge werden bei den Lernenden in den Kernschemata festgehalten. Diese sind damit essentiell für den Begriffsbildungsprozess, da sie sowohl das besondere Einzelding als auch den operationalisierten Allgemeinbegriff samt seiner Vernetzungen enthalten. Sie sind Kapselungen und Segementierungen von Wissen, die die Schülerin individuell in ihrer Rückschauperspektive entwickelt hat. Darüber hinaus bilden sie neue Blöcke der Erfahrung, die von anderen isoliert werden können und

[37] Vgl. die Abstraktionsstufen bei PIAGET (1977b) zit. nach VON GLASERSFELD (1998).

[38] AUSUBEL (1980/81) setzt ebenfalls umfassende Ideen an den Anfang des Lernprozesses. Die vorgestellten Begriffe stehen jedoch schon fest und sind sprachlich ausformuliert. Die Erschließung des Besonderen aus dem Allgemeinen ist, anders als mit dem hier genannten Prinzip, ein deduktives Vorgehen und wird „Prinzip der progressiven Differenzierens" genannt.

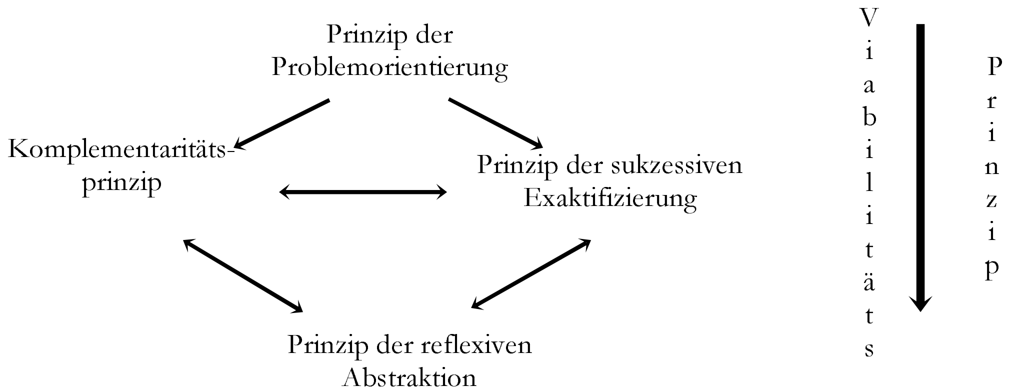
[39] Der Begriff der Exaktifizierung geht auf den von FISCHER (1978) eingebrachten Begriff zurück, meint aber nicht die Möglichkeit einer irgendwann zu erreichenden vollkommenen Exaktheit, sondern Exaktifizierung wird als Prozess betrachtet, in dem die Begriffe je nach Anforderung fortwährend präzisiert werden.

damit die Grundlage für weitere Abstraktionen liefern. In Anlehnung an PIAGET nenne ich das diesen Vorgang zu Grunde liegende Prinzip das *Prinzip der reflexiven Abstraktion.*

Die bisherigen Prinzipien heben den Prozesscharakter der Begriffsbildung hervor. Dieser Prozess ist jedoch zu jeder Zeit von dem Gütekriterium der Viabilität begleitet. Deswegen unterliegt dem gesamten Begriffsbildungsprozess das *Prinzip der Viabilität.*

Die fünf Prinzipien der konstruktivistischen Begriffsbildung lassen sich anschaulich folgendermaßen darstellen.

Abbildung 3.1. Die Prinzipien der konstruktivistischen Begriffsbildung



Das Viabilitätsprinzip begleitet den gesamten Begriffsbildungsprozess als zielweisendes Prinzip. Die Pfeile symbolisieren die gegenseitigen Abhängigkeiten. Die Beziehung zwischen den Prinzipien der Problemorientierung und der reflexiven Abstraktion wird durch das Viabilitätsprinzip symbolisiert. An dieser Stelle wäre auch die Repräsentation dieser Relation durch ein Spiralprinzip denkbar gewesen, das die Verknüpfung der Problemstellungen innerhalb eines übergeordneten Problemkontextes symbolisiert. Dieses Charakteristikum wird aber unter dem ersten Prinzip subsumiert.

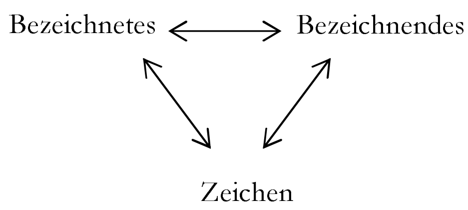
3.2 Das epistemologische Dreieck

Die Prinzipien charakterisieren den Begriffsbildungsprozess, sie allein machen ihn aber einer systematischen Beschreibung noch nicht zugänglich. Um konkrete Begriffsbildungsprozesse beschreiben und analysieren zu können, benötigt man ein theoretisches Konzept, das eine Annäherung und Einordnung in den hier beschriebenen lerntheoretischen Zusammenhang erlaubt.

Die dargelegten Prinzipien zur Begriffsbildung implizieren eine Auffassung von Wissen als subjektive Deutungen im Spannungsfeld von Referenzkontexten und symbolischen und operationalen Relationsstrukturen. Dabei repräsentieren die Problemstellungen und die daraus gewonnenen Kernschemata den einleitenden Referenzkontext, die Deutung durch die Schülerinnen die operationalen, relationalen und symbolischen Struktursysteme. Diese Auffassung von Wissen ist epistemologischer Natur und damit in erster Linie kognitiv, aber aufgrund der in Abschnitt 1.1 beschriebenen Wechselwirkungen mit den Affekten ebenfalls affektiv geprägt. Die soziale Dimension spiegelt sich in der Unterrichtsinteraktion wider, die innerhalb dieser Lernumgebung vorwiegend durch Kommunikation in Kleingruppen und nachrangig durch Kommunikation im Kursverband geprägt ist. Da in dieser Arbeit die neu entwickelten Begriffe in ihrer Wechselwirkung zu den Intentionalen Problemen und im Vergleich zum traditionellen Unterricht analysiert werden und soziale Zusammenhänge insofern nur eine Rolle spielen, als dass der Begriffsaufbau von der Gruppenzugehörigkeit abhängt, sollen die Interaktionsprozesse innerhalb der Gruppen nicht näher analysiert werden.[40]

Forschungsgegenstand sind in diesem Fall die Forschungshefte. In diesen dokumentiert die Schülerin ihr erworbenes Wissen in strukturierter Form. Auf Grund der strukturellen Vorgaben zum Aufbau der Forschungshefte (vgl. Abschnitt 2.3) lassen sich aus ihnen nicht nur die konstruierten Begriffe relational zu den Referenzkontexten, sondern auch zum Teil die Begriffsbildungsprozesse ablesen. Das notwendige theoretische Konzept wird nachfolgend beschrieben.

Abbildung 3.2. Das semiotische Dreieck nach DE SAUSSURE



Zur Konstruktion des erforderlichen Analysekonzeptes wird in diesem Abschnitt eine auf zwei zentralen Positionen aufbauende Theorie der Beschreibung mathematischer Interaktionsprozesse skizziert. Die eine Position gründet sich auf dem Konzept von LUHMANN (1997) zur Kommunikation und die andere ist die Theorie von STEINBRINGS (z.B. 1998, 2000) epistemologischen Dreieck zur Darstellung von Wissenskonstruktion. Dieser Ansatz wird modifiziert, damit er mit den Prinzipien konstruktivistischer Begriffsbildung konsistent ist und die daraus implizierte systematische Beschreibung von Begriffsbildungsprozessen auf Basis von Forschungsheften ermöglicht. Wegen der Vernachlässigung von Interaktionsprozessen, liegt das Gewicht des Analysekonzepts in der vorliegenden Untersuchung auf der Theorie von STEINBRING.

Zur Beschreibung von Verstehen in kommunikativen Prozessen bezieht LUHMANN sich auf die auf DE SAUSSURE zurückgehende Unterscheidung von Bezeichnetem (signifié), Bezeichnendes (signifiant) und Zeichen (signe) (vgl. LUHMANN, 1997, STEINBRING, 2000). Eine Mitteilende will ein Bezeichnetes mitteilen. Sie kann aber nur das Bezeichnende mitteilen, da sich durch die sprachliche Äußerung des Bezeichneten der Empfängerin der Mitteilung nicht alle Intentionen der Mitteilenden erschließen müssen. Erst durch die Wahrnehmung der Differenz von Bezeichnetem und Bezeichnendem entsteht Verständnis, welches durch die Herstellung eines Zeichens symbolisiert wird. Für die Empfängerin ist das Bezeichnende der Mitteilenden Bezeichnetes und sie stellt daraufhin wieder selbst ein neues Bezeichnendes her. Die Mitteilende sagt beispielsweise beim Verlassen des Hauses: „Die Tür ist noch auf." Ihre Intention ist, dass die Empfängerin der Mitteilung die Tür abschließt. Die Empfängerin schließt die Tür jedoch nur. In dieser Kommunikation war somit kein Verstehen beobachtbar.

Etwas komplexer stellt sich die Artikulation der Intentionen der Lehrerin durch die Intentionalen Problemstellungen dar. Diese Probleme sind das Bezeichnende von dem Bezeichneten, das die Lehrerin durch die Probleme mitteilen möchte, nämlich ihre Kernideen. Die Kernideen der Schülerin sind das neue Bezeichnende auf das von der Schülerin erkannte Bezeichnete, nämlich den Problemstellungen. Verständnis findet nur dann statt, wenn **beide** Seiten den Unterschied erkennen. „Demgegenüber wird im Mathematikunterricht meist stillschweigend davon ausgegangen, dass die mathematischen Bezeichnenden genau ein wohldefiniertes Bezeichnetes haben" (STEINBRING, 2000, S.34).

[40] Vgl. dazu die Arbeiten von KRUMMHEUER & NAUJOK (1999), MAIER & STEINBRING (1998), STEINBRING (1990, 1993, 2000).

Begriffsbildung innerhalb von KLIP findet ebenfalls durch Kommunikation statt: Kommunikation in der Schülerinnengruppe, mit der Lehrerin und innerhalb des Kursverbands. Kommunikation lässt sich aber auch als subjektbezogenes Deuten, Interpretieren und Anwenden interpretieren. Begriffsbildung vollzieht sich somit im Spannungsfeld zwischen subjektbezogenen Interaktionen und Interpretationen und wissensbezogenen Strukturen und Modellierungen. Die Dokumentation in den Forschungsheften stellt den Prozess der Begriffsentwicklung parallel zur unterrichtlichen Kommunikation dar. Dieser Prozess wird in strukturierter Form im Forschungsheft festgehalten. Aus diesen lässt sich zwar nicht unmittelbar der Einfluss möglicher sozialer und kommunikativer Begriffsbildung verfolgen, jedoch gestatten die strukturellen Vorgaben zum Aufbau der Forschungshefte (vgl. Abschnitt 2.3) eine Analyse der Spannung zwischen Bezeichnendem und Bezeichnetem aus der Rückschauperspektive der einzelnen Schülerin.

Für die Analyse der Forschungshefte in dieser Arbeit bedeutet das somit, dass nicht die Unterrichtskommunikation interessiert, sondern die epistemologische Natur des Integralbegriffs. Damit steht insbesondere die Beziehung zwischen Referenzkontext, der Deutung durch die Schülerinnen und die daraus entstehenden Begriffe im Zentrum der Aufmerksamkeit. Es geht nicht um die Beurteilung von „falschem" oder „richtigem" Verstehen, sondern um die Beschreibung unterschiedlicher Verstehensprozesse, wobei unter Verstehen die Konstruktion von Bedeutungen zwischen Referenzkontexten und symbolischen Modellen verstanden wird.

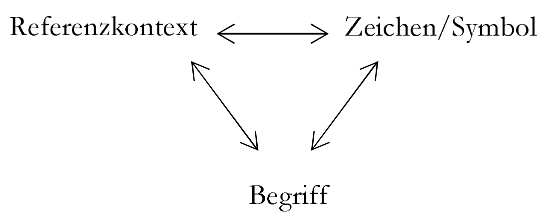


Abbildung 3.3. Das epistemologische Dreieck nach STEINBRING

Um das semiotische Dreieck für die Analyse und die Besonderheit mathematischer Begriffsbildung, die darin besteht, dass das Bezeichnende vielfach selbst ein Zeichen ist, fruchtbar zu machen, ersetzt STEINBRING das Bezeichnete durch einen Referenzkontext und das Bezeichnende durch Zeichen. Die Relation zwischen subjektiv gedeuteten Referenzkontext und seiner Symbolisierung und Operationalisierung entsprechen dann den mathematischen Begriffen (vgl. Abb. 3.3).

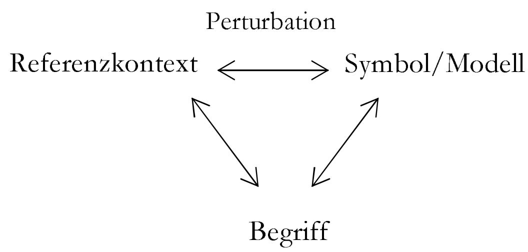


Abbildung 3.4. Das epistemologische Dreieck für KLIP

Im Umgang mit konkreten Problemstellungen und der daraus entstehenden Weiterentwicklung oder Neuentwicklung von mathematischem Wissen muss die Lernende eine Beziehung zwischen den von ihr selbstentwickelten Zeichen und Symbolen und einem konkreten Problemkontext herstellen. Erst die Verknüpfung und die Wechselwirkung ermöglicht ihr, eine Auswahl aus verschiedenen Deutungen zu treffen, Wichtiges, d.i. hier Viables herauszufiltern und Begriffe unter der Zielperspektive der Problemlösung zu gestalten. Zur Beschreibung ihrer Deutungen verwendet die Lernende Symbole und Modelle, die anhand des Referenzkontextes erprobt werden. Die daraus entstehenden Perturbationen stehen für die oben beschriebene Differenz zwischen Bezeichnetem und Bezeichnendem und ermöglichen eine Beschreibung des Komplementaritätsprinzips. Die Überwindung dieser Differenz entspricht der Herstellung des Gleichgewichtszustandes zwischen Konkretem und

Allgemeinem, der Bildung eines tragfähigen Begriffs. Die fortschreitende Entwicklung des Wissens führt zu neuen Deutungen des Referenzkontextes und der Symbole. Deswegen ist es wichtig, dass der durch die Lehrerin zur Verfügung gestellte Referenzkontext vielfältig gedeutet werden kann und die entwickelten Modelle im Laufe der Begriffsentwicklung zu neuen Referenzkontexten werden. Dies entspricht den Prinzipien der sukzessiven Exaktifizierung und der reflexiven Abstraktion. Insofern handelt es sich bei dieser Beschreibung durch das epistemologische Dreieck um eine dynamische Sichtweise der Begriffsentwicklung.

Nach erfolgreicher Beseitigung von Perturbationen ist es möglich, dass das entsprechende Modell in der nächsten Stufe der Begriffsentwicklung als Referenzkontext fungiert. Hierbei muss der Referenzkontext nicht zwingend Merkmale aus der Sachsituation enthalten. Das würde den Begriffsbildungsprozess unnötig verengen, da Verallgemeinerungen und Vergleiche von allgemeinen mathematischen Begriffen durch dieses Modell nicht mehr möglich wären.

Da in dieser Untersuchung Interaktionen nicht unmittelbar verfolgt werden, kann die Beziehung zwischen Symbol/Modell und Referenzkontext in den Forschungsheften nur explizit aufgestellt werden. Inwieweit die Begriffsbildung individuell oder sozial bedingt ist, lässt sich nur durch einen Vergleich der Forschungshefte erkennen. Damit bietet das epistemologische Dreieck eine Möglichkeit Begriffsbildung zu dokumentieren und zu analysieren.

3.1. Beurteilung des Lernerfolgs

Auch wenn die hier angestrebte Analyse der Begriffsbildung nicht die Korrektheit oder Fehlerhaftigkeit mathematischen Wissens verfolgt, ist die Beurteilung des Lernerfolgs von essentieller Bedeutung in der Schule. Die nachfolgenden Fragen sollen in der vorliegenden Arbeit nicht ausgeklammert werden, auch wenn es nicht einfach ist diese zu beantworten.

- Wann kann man davon ausgehen, dass ein Begriff entwickelt und „verstanden" ist?
- Welches sind die Kriterien, mit denen man dies überprüfen kann?

VOLLRATH (1984) schreibt dazu: „Das Lernen eines Begriffs ist eine Zustandsänderung im Denken des Lernenden, die sich dadurch zeigt, dass der Lernende am Ende dieses Vorganges gewisse nachprüfbare Fähigkeiten besitzt, die er zu Beginn des Lernvorgangs nicht besaß" (ebd., S. 11).

Diese nachprüfbaren Fähigkeiten sind nach VOLLRATH (1984, S. 10) die folgenden:

Die Lernende

(1) kann eine Definition des Begriffs angeben;

(2) kann bei vorgelegten Objekten entscheiden, ob sie unter den Begriff fallen;

(3) kann Beispiele für den Begriff nennen;

(4) kennt Eigenschaften des Begriffs;

(5) kann den Begriff zur Beschreibung von Situationen und zur Lösung von Problemen benutzen;

(6) kennt Unter- und Oberbegriffe und ist sich der Beziehungen zwischen ihnen bewusst.

Aus der Perspektive der Schülerin sind diese Kriterien auch in der Konzeption von KLIP sinnvolle Fähigkeiten. Sie fokussieren jedoch nur *einen* Zustand im Begriffsbildungsprozess, vermutlich einen sogenannten Endzustand. Vernachlässigt werden jedoch prozessuale Fähigkeiten, wie beispielsweise:

Die Lernende

(7) kann verallgemeinern, spezifizieren, analogisieren und abstrahieren;

(8) kann kreativ und selbsttätig Begriffe erfinden und definieren;

(9) kann reflexiv ihren eigenen Lernprozess beurteilen und z.B. Widersprüche und Fehlvorstellungen erkennen;

(10) ist in der Lage, diese Fehlvorstellungen oder Wissenslücken angemessen zu bearbeiten;

(11) kann auf Perturbationen angemessen reagieren;

(12) ist in der Lage, das Problemfeld vollständig zu erschließen;

(13) kann ihre Ergebnisse verständlich und übersichtlich darstellen.

Die Überprüfung des erlangten Wissen orientiert sich damit auch an Fähigkeiten, diese Begriffe zu entwickeln, zu interpretieren, zu modifizieren und zu erklären. Statt der Orientierung an einem objektiven, normativen Begriffsapparat, ist die Viabilität und interne Schlüssigkeit der Argumentationen der Schülerin Hauptbeurteilungskriterium der Lehrerin. Damit sind Begriffsentwicklungen, die den anerkannten Begriffen widersprechen, möglich und auch zulässig, soweit sie dem Anspruch einer konsistenten Argumentation genügen. In solchen Fällen ist die Lehrerin gefordert, die Darlegungen der Schülerin nur aus dem jeweiligen Kontext zu beurteilen, d.h. aus dem Nachvollzug der Rückschauposition, die die Schülerin zu diesem Zeitpunkt eingenommen hat und nicht aus einer Rückschauposition, die die Lehrerin besitzt.

Eng verbunden mit dieser Frage ist das Problem, wie die Lehrerin mit „Fehlvorstellungen" der Schülerinnen umgeht. Wie viel und welche Perturbationen von Seiten der Lehrerin sind sinnvoll? Ich befürworte ein Vorgehen der kleinstnotwendigen Hilfe, d.h. Schülerinnen werden in Phasen, in denen die intrinsische Motivation stark nachlässt, auf widersprüchliche Argumentationen aufmerksam gemacht und es werden ihnen entsprechend ihres persönlichen Standortes methodische Hilfestellungen gegeben. Die Untersuchung soll zeigen, ob die Schülerinnen auf Grundlage dieser Vorgaben in der Lage sind selbsttätig tragfähige Begriffe zu erzeugen.

Im theoretischen Rahmen dieses Konzeptes hat sich gezeigt, dass Begriffsbildung ein Akt des Denkens und Fühlens im Spannungsfeld von Perturbation, Konstruktion und Abstraktion ist und die Begriffe im Zentrum des Mathematikunterrichts stehen, aber nicht an seinem Ausgangspunkt, sondern als Werkzeug zur Bearbeitung von relevanten Problemen.

KAPITEL IV

4 Zur Funktion des Computers

Der hier beschriebene Zugang zu einem mathematischen Gebiet über Kernideen, die sich in offenen, realitätsnahen, komplexen und weitestgehend nicht reduktionistischen Problemstellungen zeigen, soll die Begriffsbildung hinsichtlich der Verankerung in den affektiven, kognitiven und sozialen Strukturen erleichtern.

Auf Grund großer Datenmengen und realitätsgetreuem Zahlenmaterial treten jedoch erschwerend, im Vergleich zum herkömmlichen Unterricht langwierige und schwierige Rechnungen auf, die für die Schülerinnen entweder nicht mehr zu bewältigen oder derart zeitaufwändig sind, dass sie zu weit von der eigentlichen Problemstellung entfernen. Abhilfe kann hier der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) schaffen. Sozusagen auf Knopfdruck können komplizierte Termumformungen zur Bestimmung von Nullstellen, Ableitungen u.a. gelöst werden. Doch es stellt sich die Frage, ob die Verfügbarkeit eines derartigen Werkzeuges nur positiv zu sehen ist. Nicht nur aufwendige Rechnungen, sondern auch einfache Termumformungen können an den Computer abgegeben werden. Schon 1992 stellte HISCHER die Frage: „Wie viel Termumformungen braucht der Mensch?“ (HISCHER, 1992)[41] oder anderes formuliert: Auf welche Kalkülfähigkeiten kann man in der Schule verzichten und auf welche Kalkülfähigkeiten darf man auf keinen Fall verzichten? Mittlerweile gibt es eine Vielzahl von Untersuchungen, die sich dieser und anderen Fragen unter verschiedenen Gesichtspunkten widmen.[42] Eine umfassende Diskussion dieser Bemühungen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Deswegen werde ich nur Zusammenhänge zu den für das Konzept und untersuchten Unterricht interessanten Gesichtspunkte erörtern. Dazu werde ich erläutern, welche Funktion der Computer hinsichtlich der drei Dimensionen des Erkenntnisprozesses besitzen kann, welche Vor- und Nachteile sich aus deren Einsatz ergeben, um dann die assoziierten didaktischen Methoden des Computereinsatzes zu erläutern, die präventiv zur Vermeidung der erwarteten Risiken als viabel angenommen werden.

4.1 Funktionen des Computereinsatzes

Unterrichtsmethodisch werden die Funktionen des Computereinsatzes üblicherweise in

- **Tutor**
- **Gegenstand**

[41] Vgl. dazu auch die Tagungsbände des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“, der jährlich in Wolffenbüttel stattfindet, z.B.: HISCHER (1992, 1993, 1994, 1995).
[42] Vgl. z.B. ASPETSBERGER (1992), GROGGER (1995, 1998), HEUGL et al. (1996), KÖHLER (1998), SCHEUERMANN (1998), SEMIK.

- **Medium**
- **Werkzeug**

unterschieden.[43]

Eine wesentliche Eigenschaften *tutorieller Systeme*, egal ob es sich um instruktionale oder intelligente Systeme[44] handelt, ist die Antizipation des Lernprozesses. Die Planung, Steuerung und Kontrolle von Schülerinnenverhalten liegt damit zum größten Teil „außerhalb" der Lernenden in der Hand der Lehrerin oder der Programmiererin. Im Unterricht bedeutet dies konkret, dass der Computer Lehrerinnenfunktionen übernimmt, wie z.B. Aufgaben stellen, Lösungen bewerten oder Hilfestellungen bieten.

Die Funktionsweise des Computers, seiner Hardware oder Software, kann auch *Gegenstand* des Unterrichts sein. Dies geschieht im Mathematikunterricht jedoch eher selten und wird im Rahmen dieser Unterrichtsreihe vollkommen ausgeklammert.

Bei der Vermittlung von Informationen durch den Computer nimmt dieser die Funktion als *Medium* ein. Das beinhaltet beispielsweise die Darstellung mathematischer Phänomene und die Präsentation von Arbeitsergebnissen.

Während die in KLIP unbedeutende Funktion des Computers als Gegenstand trennscharf zu den anderen beiden ist, lassen sich bei der tutoriellen und medialen Funktion Überschneidungen erkennen.[45] Beispielsweise ist der Computer als Plattform zur Präsentation von Problemen innerhalb eines Hypertextes mit Hilfesystem sowohl Tutor als auch Medium. Ähnlich verhält es sich bei den durch die Lehrperson vorbereiteten Veranschaulichungen mathematischer Phänomene. Diese Nutzung des Computers widerspricht jedoch dem Gedanken des konstruktivistischen Lernens, da auf diese Weise neue Inhalte aus der Rückschauperspektive der Lehrenden vermittelt werden sollen.[46] Entwickelt die Lernende hingegen selbsttätig eine derartige Umgebung, so kann diese Funktion ohne weiteres ein Teil des vorgestellten Unterrichtskonzeptes werden, da es in diesem Fall um den Ausdruck einer singulären Position geht. SCHMIDT (1988) verdeutlicht diesen Gedanken durch die nachfolgende Bemerkung:

> *„Verstehen und kompetentes Anwenden von Mathematik setzt die eigenständige Auseinandersetzung mit den Problemen, das Erkennen der in der Sache liegenden Schwierigkeiten und deren aktive Bewältigung voraus. Die perfekte und häufig sehr glatte Darstellung in der weitgehend `fertigen´ Veranschaulichung verhindert oder überspielt allzu oft den Lernwiderstand, ohne den ein wirkliches Verständnis i.A. nicht erreichbar ist."* SCHMIDT (1988, S. 8)

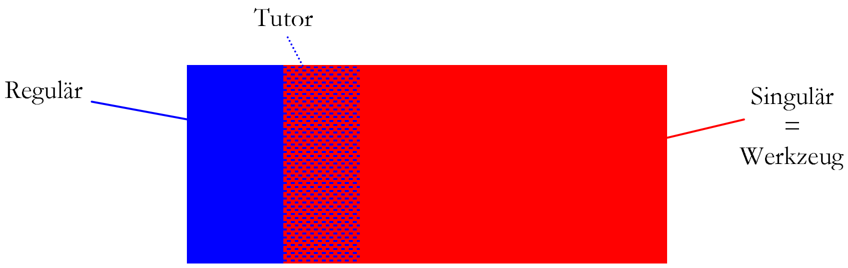
Vor dem Hintergrund konstruktivistischer Lernpsychologie bietet sich infolgedessen eine Unterscheidung der tutoriellen und medialen Funktion in einen singulären und einen regulären Aspekt an. Der *singuläre* Aspekt betrifft die Lernende als Agens, so dass der Computer ihr zum Aufbereiten, Verarbeiten, Ordnen, Klassifizieren und Darstellen von singulärem Wissen dient, während die *reguläre* Perspektive die Präsentation und das Vermittlungsangebot von regulärem Wissen und Datenmaterial *an* die Lernende beinhaltet. Innerhalb von KLIP liegt der Schwerpunkt auf dem ersten Aspekt. Der reguläre Aspekt tritt lediglich am Anfang zur Aufgabenpräsentation und als Hilfefunktion zur Bedienung des CAS in Form eines Hypertextes. In der dritten Phase des Unterrichts tritt er zur Präsentation des regulären Wissens auf.

[43] Vgl. z.B. SCHMIDT (1988), REICHEL (1995), ZIEGENBALG (1984).
[44] Ich beziehe mich hier auf eine Unterteilung in Programmtypen nach SCHANDA (1995, S. 59 ff.).
[45] Vgl. auch WINTER (1989, S. 196).
[46] Für Kritik an dieser Auffassung vgl. z.B. SCHANDA (1995, S. 65).

Als *Werkzeug* wird der Computer im Mathematikunterricht vorrangig zur Verringerung des Rechenaufwands, zur Simulation, zur symbolischen Manipulation von Termen und zur digitalen Aufbereitung der Lernergebnisse[47] eingesetzt. Neben den bekannten Überschneidungen von Tutor und Medium, sind auch die beiden Aspekte Medium und Werkzeug nicht trennscharf, da innerhalb des problemorientierten Ansatzes von KLIP beispielsweise jede graphische Darstellung von Funktionen während der zweiten Phase immer auch Werkzeugcharakter besitzt. Hier tritt der instrumentale und personale bzw. soziale Aspekt des konstruktivistischen Lernens deutlich zu Tage, der in der obigen Unterteilung in singuläre und reguläre Funktionen des Computereinsatzes schon angeklungen ist. Wissensaufbau ist zielgerichtetes Handeln, dessen Güte durch seine Viabilität bestimmt wird. Aus diesem Grund werde ich jede Nutzung des Computers als Medium, die die Problemlösung als Zweck setzt, unter den Werkzeugaspekt subsumieren. Alle anderen medialen Funktionen fallen somit unter die tutorielle Funktion.[48]

Die oben genannte Überschneidung von Medium und Tutor ist damit natürlich nicht aufgehoben. Eine disjunkte Einteilung der Computerfunktionen stellt erst die Disparität von singulärer und regulärer Funktion bereit. Auf Grundlage der benutzten Wortbedeutungen lässt sich demzufolge die singuläre Funktion mit der Werkzeugfunktion gleichsetzen, unter die sich aber auch, mit der Voraussetzung der Zweckdienlichkeit, die tutorielle Funktion

Abbildung 4.1. Funktionen des Computers



einordnen lässt. Die reguläre Funktion hingegen hat aus der Perspektive der Lernenden keine Übereinstimmung mit der Werkzeugfunktion. Die Abbildung 4.1 veranschaulicht diesen Zusammenhang.

Nach konstruktivistischem Sprachgebrauch kann man die Funktionen auch wie folgt benennen:

- **Perturbationsfunktion**
- **Konstruktionsfunktion**

Perturbieren substituiert den regulären und Konstruieren den singulären Anteil. Hierdurch werden stärker das Initiieren des Lernprozesses und die Wissenskonstruktion betont.

Durch diese Funktionszuschreibung des Computers vor dem Hintergrund konstruktivistischen Lernens, insbesondere der Gleichsetzung von singulärer Funktion und Werkzeugfunktion, gewinnt der Computer an Bedeutung für die individuellen Wirklichkeitskonstruktionen. Diese Konstruktionen besitzen bekanntermaßen drei Dimensionen, die kognitive, die affektive und die soziale Dimension. Im Folgenden möchte ich darlegen, welche Auswirkungen durch den Computereinsatz auf diese drei Dimensionen zu erwarten sind. Ich werde ausführlich auf die kognitive Dimension eingehen und die beiden anderen Dimen-

47 Innerhalb von KLIP fällt die Erstellung von Forschungsheften mit DERIVE oder einem Textverarbeitungsprogramm ebenfalls unter diesen Punkt.

48 KRAUTHAUSEN (1993) setzt die Funktionen Medium und Werkzeug vollständig gleich.

sionen nur am Rande behandeln, da ich unterstelle, dass beim derzeitigen Stand der Entwicklung die größten Auswirkungen des Computereinsatzes auf den kognitiven Bereich zu erwarten sind. Da dennoch alle drei Dimensionen in Wechselwirkung stehen, was sich insbesondere im Konkreten zeigt, habe ich vorweg einen allgemeinen Zugang gewählt und werde erst in den nachfolgenden Abschnitten, über die Vor- und Nachteile und die didaktischen Prinzipien des Computereinsatzes, die Auswirkungen konkretisieren.

4.2 Dimensionen des Computereinsatzes

4.2.1 Die kognitive Dimension

Im Laufe der Geschichte der kognitiven Psychologie sind dem Begriff der Kognition die unterschiedlichsten Bedeutungen zugewiesen worden.[49] Von der einfachen Wahrnehmung und Informationsverarbeitung bis hin zu komplexen Denkvorgängen kann Kognition alles bedeuten. Die Gründe für diese definitorischen Schwierigkeiten sollen hier nicht Thema sein.

Kognition heißt erst einmal Erkennen und umfasst traditionell alle Prozesse, die auch als *geistig* bezeichnet werden. Das sind zum Beispiel Prozesse wie Wahrnehmen, Erkennen, Speichern, Erinnern, Ordnen, Vergleichen, Unterscheiden, Folgern, Interpretieren, Denken und auch der Gebrauch der Sprache. Die Liste könnte noch um ein Vielfaches ergänzt werden. Im Wesentlichen lassen sich die Begriffe zwei Oberkategorien zuordnen: dem Erfassen und der Verarbeitung des Erfassten[50], wobei die Verarbeitung des Erfassten im Wesentlichen aus der neuronalen „Berechnung" von Unterschieden und Invarianten und deren Relationen besteht.[51] Das Erfassen vollzieht sich in der Erlebniswelt des Subjekts, welche nur durch sinnlich wahrnehmbare Perturbationen in Kontakt mit der realen Welt steht. Damit lässt sich eine tragfähige Definition von Kognition formulieren: *Kognition ist das sensorische Erfassen und die neuronale Verarbeitung des Erfassten und seiner Relationen.*[52]

Das Erfassen kann uns der Computer nicht abnehmen, aber hinsichtlich der Verarbeitung ist der Computer in der Lage die Kognition zu unterstützen. Der Computer verstärkt kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten wie Speichern, Erinnern, Ordnen, Vergleichen und Unterscheiden, so dass Kognition qualitativ verändert wird und sogar die Entwicklung neuartiger kognitiver Fähigkeiten und Fertigkeiten denkbar ist. Fähigkeiten wie Planen, Interpretieren und Folgern können vertiefend eingesetzt und qualitativ ausgebildet werden.[53]

Ein Hilfsmittel der Kognition für den Menschen ist die ikonische und symbolische Visualisierung von Denkprozessen. Der Computer bietet eine Vielzahl von Möglichkeiten, kognitive Modelle graphisch und symbolisch darzustellen. Dabei entstehen nicht nur Modelle, die das Individuum hätte auch erzeugen können, sondern Modelle, die ohne den Computer nicht denkbar gewesen wären. Der Mensch wird durch den Computer in die Lage gesetzt, verschiedene kognitive Modelle herzustellen, zu speichern, zu vergleichen und zu modifizieren, in Zeiten des exponentiellen Informationsanstiegs eine unschätzbare Erweiterung der Kognition.

---

[49] Vgl. z.B. STRUBE (1996).
[50] Im Konnektionismus wird das „Verarbeiten des Erfassten" gemeinhin Informationsverarbeitung genannt.
[51] Die Erfassen von Relationen kann sich sowohl auf dynamische als auch auf statische Relationen beziehen. Das erste wird *funktionales* und das zweite *prädikatives Denken* genannt. Vgl. SCHWANK (1999) und Kapitel 5.
[52] Vgl. auch CIOMPI (1999, S. 72) für eine ähnliche Definition von Kognition.
[53] Vgl. dazu auch KRAUTHAUSEN (1993) und DÖRFLER (1991).

So vielversprechend diese Perspektive ist, so gefährlich kann sie sich weiterentwickeln. Was ist, wenn der Mensch sich auf die Fähigkeiten des Computers verlässt und gewisse Prozesse auf Seiten des Computers nicht viabel funktionieren? Was ist, wenn der Mensch die genannten Fähigkeiten an den Computer abgibt, ihm aber die Fertigkeiten fehlen, den Computer für seine Zwecke umfassend und viabel zu nutzen? Im ersten Fall können Informationen verloren gehen oder verändert werden, was eventuell nicht einmal bemerkt oder überprüft werden kann. Es können Konstrukte scheitern, die die nicht computergestützte Kognition möglicherweise viabel entwickelt hätte. Daraus können kurzfristig problematische Situationen entstehen, was im Rahmen der konkreten Unterrichtssituation beträchtliche Folgen hat, sei es nur, dass ein Computer falsche Berechnungen durchführt, die Schülerin dies nicht bemerkt und auf Grundlage dieser Werte Wissen konstruiert. Dem kann nur begegnet werden, indem die Ergebnisse des Computers durch Vergleich und Plausibilitätsbetrachtungen immer wieder kontrolliert werden. Langfristig werden die kognitiven Systeme unter der Zielperspektive der Viabilität entsprechend modifiziert.

Die Abgabe bestimmter Fähigkeiten an den Computer kann ebenfalls bedeuten, dass kognitive Modelle existieren, die nicht durch den Computer, und damit dauerhaft auch nicht mehr durch den Menschen erzeugt werden können. Im zweiten Fall bleiben die Fähigkeiten des Menschen so wie sie sind, was entweder dazu führen kann, vom Computer als Hilfsmittel wieder Abstand zu nehmen oder aber die Kompetenzen hinsichtlich der Bedienung des Computers zu verbessern und seine Benutzerinnenfreundlichkeit zu optimieren.

4.2.2 Die affektive Dimension

Der Begriff Affekt wird ebenso uneinheitlich wie der Begriff der Kognition definiert. LUC CIOMPI (1999) sagt, ein Affekt sei *„eine von inneren und äußeren Reizen ausgelöste, ganzheitliche psycho-physische Gestimmtheit von unterschiedlicher Qualität, Dauer und Bewusstseinsnähe“* (ebd., S. 67).[54] Innere und äußere Reize sind im vorliegenden Fall die durch die Möglichkeit oder Notwendigkeit einer Computernutzung hervorgerufenen Stimmungen. Das betrifft insbesondere die Reize, die durch zurückliegende Erfahrungen mit Computern oder Erwartungshaltungen an die Fähigkeiten eines Computers ausgelöst werden. Zum Beispiel kann die Anerkennung der Computerkompetenz als eine Erweiterung der eigenen Fähigkeiten hinsichtlich guter Erfahrungen und der Aussicht, Routinearbeiten abgeben und effektiver arbeiten zu können, Freude bewirken. In Aussicht gestellte oder auch schon erlebte Anforderungen, die der Umgang mit dem Computer mit sich bringt, können Ängste auslösen, da man sich selbst nicht in der Lage sieht, diese zu erfüllen. „Die genauere Erscheinungsform, Prägnanz, Dauer, Bewusstseinsnähe und Auflösung einer solchen Gestimmtheit ist [...] außerordentlich variabel“ (ebd., S. 66). So kann die Angst, bei der Bedienung des Computers zu scheitern, viele andere Kompetenzen lahm legen.

Auch die Lust am Neuen kann eine positive Einstellung gegenüber dem Computer mit sich bringen. Insbesondere der Spaßfaktor wird immer wieder als Hauptgrund für die Einführung des Computers in der Schule angeführt (vgl. DUCHASTEL, 1990), obwohl Untersuchungen gezeigt haben, dass Lernen mit neuen Medien nicht immer Spaß macht (vgl. REINMANN-ROTHMEIER & MANDL, 1998, S. 111f.) und der Gewöhnungseffekt das Neue schnell alt werden lässt.

[54] Vgl. auch Fußnote 18.

4.2.3 Die soziale Dimension

Die soziale Dimension enthält immer auch Anteile der anderen Dimensionen. In der divergierenden Phase beim Aushandeln gemeinsamer Konstrukte spielen die individuellen kognitiven Konstrukte und die Affekte eine bedeutende Rolle. Deswegen schränke ich die Diskussion der sozialen Dimension des Computereinsatzes auf die Bereitstellung zusätzlicher Kommunikationsmöglichkeiten und der Visualisierungskompetenz ein.

Funktionen wie die Datenübertragung ermöglichen zwar einen sekundenschnellen Informationsaustausch zwischen mehreren Individuen und sind daher für räumlich und zeitlich weit voneinander entfernte Gesprächspartnerinnen vorteilhaft. Sie sind jedoch in Anbetracht einer Lerngruppe, die sich mehrmals in der Woche vis-à-vis begegnet eher peripher zu bewerten. Die Fähigkeit hingegen, die individuellen kognitiven Konzepte in der divergierenden Phase allen Beteiligten vorzustellen, sind nicht nur innerhalb der individuellen kognitiven Dimension, sondern auch für die soziale Begriffsbildung als Gewinn einzuschätzen. Insofern ist die Visualisierungskompetenz nicht nur für die kognitive, sondern ebenfalls für die soziale Dimension von Bedeutung.

4.3 Vorteile und Nachteile des Computereinsatzes

Einige Vor- und Nachteile des Computereinsatzes sind oben schon angeklungen. Es gibt mittlerweile sehr viele Publikationen und Untersuchungen zu diesem Thema, sowohl hinsichtlich der Auswirkungen auf die Bildungsziele des Mathematikunterrichts als auch auf die Inhalte und die methodische Konzeption.[55] Ich werde hier nur auf die für das vorgestellte Konzept relevanten Aspekte eingehen, wobei ich mögliche Auswirkungen des Computereinsatzes in den einzelnen Dimensionen gemeinsam diskutiere und erwägenswerte Gegenstrategien skizziere.

Da der Computer den Schülerinnen die explizite Berechnung von Termumformung abnimmt, ergibt sich im Gegensatz zum Unterricht ohne Computer Raum und Zeit, Probleme mehrfach zu modellieren, verschiedene Lösungsmöglichkeiten zu testen, die verwendeten Lösungsverfahren zu abstrahieren und Beweise zu finden. Das bedeutet, statt Kalkülfähigkeiten zu trainieren, werden jetzt Fähigkeiten wie Modellieren, Problemlösen, rationales Argumentieren und Beweisen gefördert. Die Möglichkeit zum mehrfachen Modellieren begünstigt den Einsatz von divergenten Problemen. Die Kalkülentlastung verhindert die Beschränkung auf einfache Funktionenklassen. Zudem ist die Visualisierungskompetenz von CAS bedeutsam. Visualisierungen sind ohne Computer oft sehr aufwendig. CAS geben die Möglichkeit, nicht nur eine Vielzahl von Visualisierungen zu erzeugen, sondern diese auch zu bearbeiten. Dadurch wird zu einem besseren Verständnis der dargestellten Inhalte beigetragen. Ein schneller Zugriff auf die drei von (BRUNER et al., 1971) herausgestellten Darstellungsebenen, der enaktiven, der ikonischen und der symbolischen, lässt sich leichter als im herkömmlichen Unterricht realisieren. Daten- und rechenintensive Vorgänge können schnell und problemlos bewältigt werden und begünstigen experimentelles Lernen.

Diesen Vorteilen stehen natürlich mögliche Risiken gegenüber. Durch die Konzentration auf komplexe Probleme besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen Grundfertigkeiten[56] verlieren, wodurch sie gegebenenfalls nicht mehr in der Lage sind, die Ergebnisse des Computers zu kontrollieren. Die Perfektion der Darstellung und die Kraft der Rechenleistung

[55] Um nur einige zu nennen: HEUGL et al. (1996), HEYMANN (1996), HOLE (1998) , KÖHLER (1995), KÖRNER (1992), REICHEL (1995), SEMIK.

[56] Damit sind u.a. folgende Fähigkeiten gemeint: Zusammenhänge erkennen, Verfahren und Regeln verstehen, Definitionen beherrschen.

des Computers können mögliche Schwierigkeiten im Lösungsprozess verschleiern. Sie können aber auch das Vertrauen in die eigenen Leistungen auf Seiten der Schülerin verringern. So erlebt die Schülerin sich in einer Abhängigkeit vom Computer, die sich nachhaltig negativ auf die Motivation zum mathematischen Denken auswirken kann. Blindes Probieren ersetzt dann eventuell das bewusste, reflektierende Handeln. Die starke Kalkülentlastung durch den Computer kann den Schülerinnen, die sonst durch das Lösen von Routineaufgaben ihre Erfolgserlebnisse erhielten, diese versagen. Im schlimmsten Fall werden die Unterrichtsinhalte derart anspruchsvoll, dass die von den Schülerinnen geforderten Fähigkeiten gar nicht mehr leistbar sind. HENTSCHEL und PRUZINA (1995) merken dazu an:

> *„Indizien sprechen dafür, dass eine Schwerpunktverlagerung von `Fertigkeiten zu Fähigkeiten´ nicht zu einem deutlich höheren Fähigkeitsniveau bei Schülern führen wird."*
>
> (HENTSCHEL & PRUZINA, 1995, S. 198)

Langfristig kann das bedeuten, dass die Motivation bei den Schülerinnen, sich mit Mathematik auseinander zu setzen, sinken kann.

Abgesehen von den veränderten Inhalten des Unterrichts kann sich ebenfalls der Umgang mit dem Computer motivationshemmend auswirken. Damit ist sowohl die Abhängigkeit von möglichen Rechenfehlern des Computers als auch ein vielleicht als defizitär erlebter Umgang mit Technik gemeint. Erscheint den Schülerinnen vielfach die Mathematik zu schwierig, müssen sie jetzt erst ein oder mehrere Programme erlernen, um überhaupt zur Mathematik zu gelangen. Sollte dieses Programm dann nicht korrekt funktionieren, besteht die Gefahr, dass die Schülerin sich selbst die Schwäche der Maschine zuschreibt. Dabei sind die Mädchen stärker betroffen als die Jungen. „Mädchen trauen sich weniger zu, weil ihnen Jungen weniger zutrauen. [...] Sie halten Jungen für kompetenter im Umgang mit Technik. [...] Jungen halten sich selbst ebenso für kompetenter; sie behaupten auch dann Kompetenz, wenn wenig vorhanden ist. Umgekehrt betonen Mädchen Lücken, auch wenn sie über Kompetenzen verfügen" (GESELLSCHAFT FÜR INFORMATIK, 1993, S. 39). Studien haben gezeigt, dass sich dieser Unterschied sogar verschärft, wenn Jungen und Mädchen in der Schule gemeinsam am Computer arbeiten.[57] Gegenmaßnahmen gegen diese Tendenz können darin liegen, dass ein Kriterium der Gruppenaufteilung Geschlechtszugehörigkeit ist, dass die Problemstellungen bewusst *auch* auf Mädcheninteressen abgestimmt sind, und dass Rollenstereotypen sowohl bei der Lehrperson als auch bei den Schülern und Schülerinnen bewusst gemacht werden. Der dritte Vorschlag sollte selbstverständlich sein. Maßnahme 2 ist sehr wichtig, die mädchenspezifischen Probleme sollten aber nicht ausschließlich für die Mädchen bestimmt sein, da dadurch Rollentypisierung noch verstärkt würden. Diese Gefahr der Verstärkung ist durch die erste Maßnahme gleichermaßen gegeben, wieso ich davon absehen würde.[58]

Eine letzte hier zu erwähnende Gefahr ist die, dass die Schülerinnen zu sehr am Computer „kleben", so dass sie nur noch auf Computerprozesse reagieren, statt mit Hilfe ihrer typischen kognitiven Fähigkeiten des Planens, Interpretierens und Folgerns zu agieren. Die Lehrerin kann durch methodische Hilfestellungen, sowohl präventiv als auch situativ, darauf eingehen, indem sie den Schülerinnen beispielsweise rät, Problembearbeitungen zeitwiese auch ohne Computereinsatz durchzuführen.

Weitere vorbeugende Verhaltensweisen auf die prognostizierten nachteiligen Auswirkungen des Computereinsatzes werde ich entlang der didaktischen Prinzipien diskutieren.

---

[57] Vgl. HOELSCHER (1994).

[58] Weitere zu erwartende geschlechtsspezifische Differenzen werden in Kapitel 5 thematisiert.

4.4 Didaktische Prinzipien des Rechereinsatzes

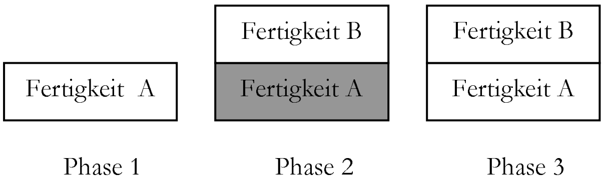
Der Begriff *Didaktik* ist aus dem griechischen Verbum *didaskein* abgeleitet und bedeutet Lehren bzw. Unterrichten. Didaktik kann somit als eine Unterrichtstheorie verstanden werden, deren Schwerpunkt auf dem *Lehren* liegt. Mit dem Attribut „didaktisch" versehene Prinzipien sind, so verstanden, Konzepte, die von der Lehrperson bewusst eingesetzt werden, mit dem Ziel die Schülerinnen möglichst gut zu unterrichten, wobei „möglichst gut" ein Gütekriterium aus der Perspektive *der Lehrerin* ist. Das bedeutet im herkömmlichen Unterricht in der Regel, dass die Lehrperson sich genötigt fühlt, in den Lernprozess einzugreifen, sobald sie Abweichungen vom unterliegenden Prinzip bemerkt. In einer Lernumgebung, die konstruktivistisches Lernen ermöglichen will und somit unterstellt, dass Außensteuerung weitgehend ausgeschlossen ist, kann dies nicht gelingen. Die Konsequenz ist, ich verzichte entweder auf didaktische Prinzipien oder modifiziere sie derart, dass ich sie als Prinzipien oder Metoden verstehe, wie *die Schülerin* mit dem Werkzeug Computer „am Besten" umgeht. „Am Besten" ist nun ein Gütekriterium aus Sicht der Schülerin. Didaktik kann danach als eine Unterrichtstheorie verstanden werden, die den Schwerpunkt auf das *Lernen* legt.

In diesem Sinne werde ich die gegenwärtig gebräuchlichen didaktischen Prinzipien zum Computereinsatz mit Blick auf meine Arbeit kurz charakterisieren:

- **das White Box/Black Box-Prinzip**
- **das Black Box/White Box-Prinzip**
- **die Gerüstdidaktik**
- **das Window-Shuttle-Prinzip**
- **das Modulprinzip**

In der White Box-Phase des *White Box/Black Box-Prinzips* nach BUCHBERGER (1992) (vgl. auch HEUGL et al., 1996) erlernen und erkennen die Schülerinnen z. B. genetisch einen Begriff oder ein mathematisches Konzept *ohne* Unterstützung des Computers, d.h. die erlernten Verfahren können von den Schülerinnen ohne Computer ausgeführt werden. Im Anschluss nutzen die Schülerinnen den Computer zur Durchführung dieser Aktivitäten, um sich in der nächsten White Box-Phase neues Wissen anzueignen, wobei das zuletzt Erlernte dem Computer als Black Box überlassen wird. „Das Gebäude entwickelt sich also als ein System ineinandergeschachtelter White und Black Boxes" (HEUGL et al., 1996, S. 160). In der Black Box-Phase des *Black Box/White Box-Prinzips* bekommen die Schülerinnen einen Algorithmus zur Verfügung gestellt, den sie auf geeignete Beispiele anwenden können. Ziel ist nun, die Black Box wieder „weiß" zu machen und die dahinterliegende Methode zu explorieren, zu verstehen und ohne Computer zu anwenden.

Durch diese Fähigkeit, bei einfachen Beispielen jede Black Box wieder weiß machen und bei komplexen Termumformungen Black Boxes anwenden zu können, erhalten die Schülerinnen ausreichend Kompetenzen in mathematischen Grundfertigkeiten und ausreichend Zeit sich intensiv mit neuen Problemen zu beschäftigen. Es ist jedoch weiterhin darauf zu achten, dass die einmal erworbenen Kompetenzen im Sinne einer Stabilisierung von Wissen und im Sinne der Prinzipien der konstruktivistischen Begriffsbildung immer wieder gefördert und gefordert werden. Ohne diesen Grad an Kalkülkompetenzen kann die Schülerin gar nicht entscheiden, welche Black Box im einzelnen Fall anzuwenden ist. Die Angst vieler Mathematikerinnen, der Computereinsatz fördere die unreflektierte, automatisierte Anwendung von Black Boxes wird hierdurch entkräftet. Im Gegenteil, die Schülerinnen gewinnen Zeit um ihre Handlungen zu reflektieren.



Die *Gerüstdidaktik* von KUTZLER (1995) stellt eine Erweiterung der Prinzipien von BUCHBERGER dar. KUTZLER unterscheidet insgesamt fünf Fälle. Erst wenn Fertigkeit A in Phase 1 erlernt ist, kann sie in Phase 2 zur Lösung von untergeordneten Problemen als Black Box, d.h. mit Computerunterstützung, genutzt werden (Fall 1). Ist Fertigkeit A in der zweiten Phase jedoch unverzichtbar, muss sie in einer dritten Phase ohne Computer ausgeführt werden können (2. Fall). Ist die Fertigkeit A besonders wichtig für die Lernende, sollte sie von der Lernenden selbst programmiert werden (3. Fall). Wird die Fertigkeit A von der Lehrerin für verzichtbar gehalten, so muss von ihr keine White Box erzeugt werden (4. Fall). Im fünften Fall wird die Fertigkeit A von Beginn alternierend mit und ohne Computer verwendet.

Die ersten beiden von KUTZLER genannten Methoden benötigen ein ständiges Korrektiv, das mit Hilfe einer innewohnenden Rückschauperspektive den Lernprozess der Schülerin steuert[59], was sich aus konstruktivistischer Sicht als nicht sinnvoll erweist. Methode 3 setzt ebenfalls die Rückschauperspektive voraus, zudem fehlt es an mathematischen Verfahren, die von vornherein für den Mathematikunterricht uninteressant sind.[60] Aus konstruktivistischer Sicht zeigt sich die fünfte Methode als die vielversprechendste, wobei die vierte Methode darin enthalten ist[61]. Der Schülerin ist es frei gestellt, wann und wie sie den Computer einsetzt. Sie kann kontinuierlich mit dem Computer arbeiten, sie kann seinen Einsatz aber auch auf ein notwendiges Maß beschränken. So besteht die Möglichkeit, zuerst mathematische Verfahren ohne Computer zu entwickeln, um diese im Anschluss zu einer Black Box zu verarbeiten. Auf Grundlage einer Einführung in den Umgang mit dem jeweiligen CAS bzw. Computer, kann sie durch experimentelles Arbeiten jedoch ebenso die Funktionsweisen einer Black Box erschließen, die sich hinsichtlich der Lösung ihres Problems als viabel erweisen könnte. Die Viabilität einer Black Box zeigt sich jedoch nur, wenn man die Funktionsweise der Black Box verstanden hat[62] oder aber ein Verfahren oder Kriterium besitzt, sie zu kontrollieren. Der Besitz eines derartigen Kontrollverfahrens eröffnet immer schon einen Teil der Grundvorstellungen des Begriffes, der hinter der Black Box steht. Trotzdem kann er aber auch, wie beispielsweise bei der Überprüfung der Wurzelfunktion durch Quadrieren des Ergebnisses, den Algorithmus vollkommen im Dunkeln lassen. Kann das Problem dennoch gelöst werden, besteht für die Schülerin keine Notwendigkeit die Black Box weiter zu explorieren. Steckt aber in dem Problem selbst die Notwendigkeit, das Verfahren zu verstehen, wird die Schülerin weiter forschen.

Gegen das experimentelle Arbeiten kann zudem eingewendet werden, dass eine Lösung auch allein durch eine Try-and-Error-Methode zu finden ist, die keines Verständnisses bedarf. Dem möchte ich die These entgegenhalten, dass, sobald die Schülerin sich ein Problem zur Kernidee gemacht hat, großes Interesse besteht, das Problem und ihre Lösung zu verstehen. Zum anderen ist eine Try-and-Error-Methode langfristig nicht nützlich, da sie einer systematischen Behandlung verwandter Probleme entgegensteht, was ebenfalls unbefriedigend für die Schülerin ist. Die Aufgabe der Lehrerin besteht vielmehr

[59] Das kann ein tutorielles System oder die Lehrerin sein.

[60] Die Wurzelfunktion wird üblicherweise als ein derartiges Verfahren behandelt.

[61] Innerhalb der Integralrechnung ist die vierte Methode z.B. an der Stelle sinnvoll, wenn die Schülerin zur schnelleren Berechnung das Integral als Grenzwert der Produktsummen programmieren und so selbsttätig eine Black Box erzeugen kann.

[62] Verstehen heißt z.B., dass die Schülerin die Black Box ohne Probleme „weiß machen“ kann.

darin, die Kernideen, die Perturbationen während des Lernprozesses und die Kriterien für die Lösungspräsentation so zu gestalten, dass folgendes Prinzip deutlich wird: *Nur was verstanden ist, ist nützlich*. Von diesem Prinzip geleitet, werden die bisher genannten *Prinzipien* des Computereinsatzes zu für die Schülerin nützlichen *Methoden* im Lösungsprozess. Durch die Bereitstellung einer geeigneten Kernidee wird für die Schülerin die Stabilisierung des Begriffs als White Box zur Notwendigkeit.

Ein weiterer wichtiger Vorteil von CAS besteht in der Anwendung der *Window-Shuttle-Technik*. Diese besagt, dass die Lernende in verschiedenen Fenstern mehrere Darstellungsmöglichkeiten *eines* Gegenstandes gleichzeitig nutzen kann. So kann beispielsweise mit DERIVE im Algebra-Fenster der Funktionsterm und zugleich im Grafik-Fenster der zugehörige Graph gezeigt werden. DÖRFLER (1991) schreibt in diesem Zusammenhang zur Begriffsbildung:

> *„Erst die Bereitstellung verschiedener Prototypen eines bestimmten Allgemeinbildungsbegriffs, das Herstellen von Beziehungen zwischen den einzelnen Prototypen lenkt die Aufmerksamkeit des Lernenden über die Spezifität des einzelnen Prototyps hinaus auf den übergeordneten Begriff.“*
>
> DÖRFLER (1991, S. 58)

Diese Technik zeigt exemplarisch, wie die Fähigkeiten des Individuums durch den Computereinsatz erweitert werden. Die Generierung verschiedener Prototypen eines Begriffes impliziert ein Vergleichen, Ordnen und Klassifizieren der Prototypen und erzwingt damit eine Abstraktion, die die Schülerin zu dem alle Prototypen umfassenden Begriff führt.[63]

Das letzte zu diskutierende Prinzip ist das *Modulprinzip*. Module entstehen durch das Zerlegen eines Problems in einzelne eigenständige Teile. Bei der Bearbeitung komplexer Probleme ist es oft sinnvoll, das Problem in Teilprobleme zu zerlegen und die Verfahren zur Lösung der Teilprobleme wieder zur Gesamtlösung zusammen zu setzen. Die Modularisierung von Problemen ist von essentieller Bedeutung für diese Prozesse, da sie komplexes Wissen komprimiert. Ein Problem wird in einer hierarchischen Ordnung vorstrukturiert, die einzelnen Teile werden gekapselt und können dann als Operationen wieder eingesetzt werden. Es gibt von Lehrerinnen, von Programmiererinnen und von Schülerinnen erzeugte Module. Die vierte Methode der Gerüstdidaktik enthält sozusagen die von Schülerinnen erzeugten Module, welche im Rahmen des Begriffsbildungsprozess von KLIP die maßgeblichen sind. Damit ist das Modulprinzip auch Teil der Methode 5 der Gerüstdidaktik.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die singuläre Funktion bzw. die Konstruktionsfunktion für die Schülerin die zentrale Funktion des Computers in der zu Grunde liegenden Lernumgebung ist. Damit wirkt der Computer insbesondere auf die kognitive Dimension im Erkenntnisprozess ein. Er übernimmt Fähigkeiten des Menschen wie Speichern, Ordnen, Berechnen, Visualisieren u.ä., wodurch dem Menschen der Ausbau anderer kognitiver Fähigkeiten wie Planen, Interpretieren und Folgern, bzw. die Schöpfung neuer Fähigkeiten ermöglicht wird. Neben diesen Vorteilen bestehen die Risiken in erster Linie in dem möglichen Verlust von Grundfertigkeiten, die an den Computer abgegeben werden, aber auch in einer möglicherweise nicht viablen Kompetenzzuweisung an den Computer. Den Risiken kann durch ein von dem Prinzip, *nur was verstanden ist, ist nützlich*, geleiteten Umgang mit dem Computer begegnet werden, das sich in einer alternierenden Problembearbeitung mit und ohne Computer zeigt, wobei die einzelnen Phasen dazu genutzt werden, Black Boxes, White Boxes und entsprechende Module selbsttätig zu erzeugen.

---

[63] Die Schülerinnen bearbeiten beispielsweise auf der einen Seite Funktionsterme als einen Prototyp, und auf der anderen Seite die Funktionsgraphen als einen weiteren Prototyp.

KAPITEL V

5 Gender und Mathematikunterricht

5.1 Die soziale Konstruktion von Geschlecht

Der Konstruktivismus, wie er in dieser Arbeit beschrieben wird, bietet nicht nur als erkenntnistheoretischer Ansatz Grundlage Lernprozesse zu beschreiben, sondern kann aus soziologischer Perspektive erklären, was sich unter „Geschlecht" verstehen lässt.

Das Erkennen eines Sachverhaltes setzt mit seiner Unterscheidung von anderen Sachverhalten an (vgl. Abschnitt 1.1). Dadurch wird unsere Erlebniswelt strukturiert und verhilft uns zu einer sicheren Orientierung in derselben. Eine dieser Unterscheidungskategorien ist das Geschlecht. Diese Unterscheidung wird sowohl individuell, als auch sozial vorgenommen, was zeigt, dass auch in soziologischer Perspektive der radikal konstruktivistische Ansatz nach VON GLASERSFELD nicht ausreicht, weil er die soziale Dimension der Strukturzuschreibung und die damit einhergehende Interaktion ausklammert. Statt der Einschränkung auf die Beobachtung der eigenen Konstruktionen, müssen die Konstruktionen, die in unsere Konstruktionen eingehen, hinterfragt werden. Und aus diesem Grund muss das *Wie* der Konstruktion reflektiert werden, damit wir verstehen können, *was* konstruiert wird (vgl. KNORR-CETINA, 1989, S. 92).

Die Kategorie Geschlecht wird insofern als soziale Konstruktion und Strukturkategorie verstanden. Geschlecht ist etwas, das „gemacht" und „mitgemacht" wird, dass aber auch unter Einbeziehung eigener Einwirkungen fortwährenden Veränderungsprozessen unterliegt.[64].

Die Veränderbarkeit von Konstruktionen ermöglicht dem weiblichen Geschlecht *und* dem männlichen Geschlecht in interaktiven, sozialen Prozessen einmal gemachte Geschlechtszuschreibungen wieder aufzuheben und neu zu definieren. So schreibt CAROL HAGEMANN-WHITE, „dass es keine notwendige, naturhaft vorgegebene Zweigeschlechtlichkeit, sondern nur verschiedene kulturelle Konstruktionen von Geschlecht" (KAHLERT, 2000, S.27) gibt. Somit sind zugeschriebene geschlechtsspezifische Eigenschaften veränderbar und nicht verallgemeinerungsfähig. Die Veränderung von Geschlechtszuschreibungen der Strukturkategorie Geschlecht ist ein Ziel, das mit der Entwicklung der Lernumgebung KLIP verfolgt wird. Dabei sind insbesondere die Zuschreibungen gemeint, die für mindestens eines der beiden Geschlechter als nachteilig beobachtet bzw. empfunden werden. Als Referenz für beobachtete Zuschreibungen wird der aktuelle Stand der Forschung verwendet.

---

[64] Die permanente Konstruktion von Geschlecht wird als *doing gender*[64] bezeichnet, im Gegensatz zu der biologistisch geprägten Auffassung, dass Geschlechtzugehörigkeit von Geburt an festgelegt ist (*being gender*).

5.2 Die soziale Konstruktion von Geschlecht in der Schule

Die Unterscheidung von Geschlecht im schulischen Leben hat ihre besonderen Formen. Sie zeigt sich im Interesse an bestimmten Fächern, an den Leistungen und der Leistungsbereitschaft aber auch im sozialen Verhalten zwischen Schülerinnen und Lehrerinnen. Entsprechend der Differenzierung von Konstruktivismus in Abschnitt 1.1 werden die sozial konstituierten Unterschiede der Geschlechter in den drei Dimensionen dargestellt.

5.2.1 Die kognitive Dimension

Die Untersuchungen der letzten Jahre zu Geschlechterdifferenzen in der Mathematikleistung zeigen einen fortwährend abnehmenden durchschnittlichen Unterschied zwischen Mädchen und Jungen in angelsächsischen Ländern. Deutschland konnte sich diesem allgemeinen Trend jedoch nicht anschließen. Der Unterschied zwischen Jungen und Mädchen ist in den letzten drei Jahrzehnten weitgehend stabil geblieben (vgl. BAUMERT et al., 1998, S. 134).

Der Unterschied in den Mathematikleistungen ist auf die gesamte Schulzeit nicht gleichverteilt. Bis zum 14. Lebensjahr ist er kaum bemerkbar, danach wächst er kontinuierlich und hat im 19. Lebensjahr sein größtes Ausmaß zu Gunsten der Jungen (vgl. HYDE et al., 1990 zit. in KELLER, 1998). Im Problemlösen[65] zeigen die Jungen leicht bessere Leistungen, während im Verstehen von mathematischen Konzepten kaum ein Unterschied sichtbar ist. Auf Grund des Forschungstandes sind damit unterschiedliche Leistungen in dem Bereich Problemlösen von Jungen und Mädchen der Jahrgangsstufe 12 zu erwarten. Eine mögliche Veränderung durch das Konzept KLIP soll in dieser Arbeit untersucht werden.

Mädchen besitzen in der Regel bezüglich ihrer angenommenen Mathematikfähigkeit ein geringeres Selbstvertrauen als Jungen, selbst wenn sie objektiv bessere Leistungen zeigen. Dabei wird unter Selbstvertrauen die aus eigenen Erfahrungen hervorgehende Einschätzung der eigenen Leistungsfähigkeit verstanden. Auch hier zeigt sich ein Ansteigen der Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen bis zum 15. Lebensjahr, obwohl die Unterschiede im Allgemeinen eher gering sind (vgl. KELLER 1998, S.21). Die Einschätzung der eigenen Leistung hat wesentlichen Einfluss auf die Leistung in dem jeweiligen Bereich. Eine etwas günstigere Einschätzung der eigenen Leistungen als die tatsächlich vorhandene Leistung wirkt sich positiv auf die Leistung aus, wohingegen der umgekehrte Fall eher negativen Einfluss auf die Leistung hat (vgl. KELLER 1998, S. 22). Für die Gestaltung der Lernumgebungen bedeutet dies, dass diese eine „selbstwertdienliche" Atmosphäre schafft. Das heißt u.a., dass positive Leistungen auf Begabung und eigene Arbeit und negative Leistungen auf Pech zurückgeführt werden können. Hinzu kommt die Bereitstellung von selbstbeurteilenden Strategien für die Schülerinnen.

Mathematische Aufgaben werden nach SCHWANK (1994, 1996, 1999) von Jungen und Mädchen unterschiedlich bearbeitet. Dabei unterscheidet sie zwei Mechanismen bei der Begriffsbildung: das prädikative und das funktionale Denken. Es handelt sich um einen wichtigen Theorieansatz, der nicht, wie die Prinzipien des konstruktivistischen Lernens allgemeine Zusammenhänge strukturiert und erklärt, sondern Deutungsansätze für Zusammenhänge zwischen dem zu lösenden Problem und der individuellen Struktur problematisiert.

VAN DER WAERDEN (1954) (zit. nach SCHWANK, 1996) beschreibt drei Vorstellungen für das Verständnis eines mathematischen Begriffs als zentral: eine motorische, eine visuelle

[65] Unter Problemlösen wird die Bearbeitung von Aufgaben verstanden, die nicht allein durch Anwendung von erlernten Schemata zu lösen sind.

und eine sprachliche. Der Begriff des Integrals, beispielsweise, ist durch die motorische Vorstellung des kumulativen Aneinanderreihens von immer kleiner werdenden Rechteckflächen repräsentiert, die man in der visuellen Vorstellung durch die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse ersetzt. Die dritte, die sprachliche, Repräsentation ist der Name des Begriffs. Hierbei vollzieht sich der Prozess der Begriffsentwicklung vom konkreten Handeln zum abstrakten Symbol. Das abstrakte Symbol ist jedoch nichts ohne die visuelle Vorstellung, die wiederum ein Produkt der motorischen Repräsentation ist. Damit steht für VAN DER WAERDEN die motorische Vorstellung im Zentrum des Begriffs.

Diese motorische Vorstellung geht bei Schwank in der *funktionalen* kognitiven Struktur auf (vgl. SCHWANK, 1996, S. 172). Darunter versteht sie eine Struktur, die sich in einem „Denken in Handlungsfolgen und Wirkungsweisen“ (ebd. S.173) äußert. Im Gegensatz dazu spricht sie bei einem Denken in Beziehungen und Urteilen von der Anwendung einer *prädikativen* kognitiven Struktur.[66]

Zur Bearbeitung eines Problems wird vorrangig die Strategie entwickelt, die zur jeweiligen durch Erfahrung aufgebauten Struktur assoziiert ist. SCHWANK (1996) hat beobachtet, dass beide Strukturen unterschiedlich stark ausgeprägt sind und jedes Individuum eine der beiden Strukturen präferiert. Diese Unterscheidung zeigt sich insbesondere zwischen den Geschlechtern. Während bei Jungen die Präferenz für funktionales Denken größer zu sein scheint, besteht bei den Mädchen eine Vorliebe für das prädikative Denken.

Hinsichtlich der Bearbeitung von Problemlöseaufgaben können sich damit unterschiedliche Bearbeitungszeiten ergeben, da die Strukturierung beim prädikativen Herangehen mehr Zeit erfordert. Bei den Aufgaben, die konzeptionelles Wissen abfragen, müssten hingegen die Mädchen leichte Vorteile besitzen, da diese Aufgaben eine Resonanz mit ihrer bevorzugten Denkstrategie aufweisen. Im Rahmen dieser Arbeit soll untersucht werden, ob sich diese Zuordnung bestätigt bzw. ob KLIP Möglichkeiten bietet diese Zuschreibungen aufzuheben.

Der kognitiven Dimension lassen sich auch die sprachlichen Kompetenzen der Schülerinnen zuordnen. Hier werden den Mädchen im Allgemeinen höhere Kompetenzen zugesprochen. Damit ist die Situation für die Jungen hinsichtlich der zu erwartenden beruflichen Anforderungen nicht positiv. Die Globalisierung des Arbeitsmarktes erfordert sprachliche Kompetenzen. Deshalb müssen Jungen gemäß der Leitperspektive der Gleichstellung von Jungen und Mädchen eine stärkere Unterstützung in diesem Bereich erfahren. Im Mathematikunterricht wird üblicherweise die durch Formalismen geprägte Sprache der Mathematik gepflegt, nicht aber die Übersetzung in die Alltagssprache. Eine allgemeinverständliche Darstellung bereichsspezifischen Wissens ist jedoch zur Artikulation in bereichsübergreifenden beruflichen Zusammenhängen notwendig. Das Führen von Forschungsheften soll die Ausbildung dieser Kompetenzen und damit insbesondere die Jungen unterstützen.

5.2.2 Die affektive Dimension

Der Abbau von Geschlechterdifferenzen beinhaltet neben dem Ziel der Gleichstellung in der kognitiven Dimension ebenfalls, dass keine Unterschiede in der affektiven Dimension existieren sollten. Zu der affektiven Dimension wird hier Interesse am Mathematikunterricht und das Selbstkonzept der Schülerin gezählt.

[66] Die Begriffe prädikativ und funktional sind der mathematischen Logik entlehnt (vgl. z.B. SCHWANK 1996, S. 173).

Interesse bezeichnet eine andauernde und situationsübergreifende Relation eines Individuums mit einem von ihm unterscheidbaren Bereich seiner Erlebniswelt. Dabei kann man zwei Dimensionen unterscheiden: das sich in den Strukturen der individuellen Erlebniswelt widerspiegelnde Interesse (dispositionales Persönlichkeitsmerkmal) und das innerhalb der aktualen Auseinandersetzung gezeigte Interesse.[67] Auslöser für Interesse kann sowohl die individuelle Struktur als auch eine Perturbation sein. Interesse lässt sich laut (KRAPP, 1992, S. 309) durch deklaratives und prozedurales Wissen repräsentieren, welches sich durch die Auseinandersetzung mit dem unterscheidbaren Bereich bildet.

KRAPP schreibt, dass Lernen aus Interesse zu wiederholten Auseinandersetzung mit dem Thema führt. Konstruktivistisch gesehen kann es ein Lernen ohne Interesse überhaupt nicht geben. Demzufolge interessiert nicht die Existenz von Interesse, sondern allein die Art und Qualität von Interesse und deren Förderung. Ein folgerichtiger Zusammenhang zwischen Leistung und Interesse ist vielfach untersucht und belegt worden (vgl. z.B. SCHIEFELE et al., 1993). In der vorliegenden Arbeit soll ein möglicher Zusammenhang von Interesse und den verschiedenen Aspekten der Lernumgebung, Kernideen, Forschungshefte und Computer, und deren Einfluss auf die Leistung und die Begriffsentwicklung im Mathematikunterricht untersucht werden. Im Detail heißt das:

- Wie stark ist das Interesse bei den Mädchen und Jungen an den Forschungsheften, am Werkstattunterricht, am Einsatz des Computers und an den Intentionalen Problemen?
- Wie bewerten die Schüler und Schülerinnen die Relevanz dieser Aspekte für ihren eigenen Lernprozess?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Interesse und Leistung innerhalb von KLIP?
- Wie lässt sich ein möglicherweise geschlechtsspezifischer Zusammenhang deuten und für den Mathematikunterricht fruchtbar machen?

In verschiedenen Untersuchungen wurden geschlechtsspezifische Präferenzen bezüglich der einzelnen Fächer diskutiert (vgl. z.B. FAULSTICH-WIELAND & NYSSEN, 1998). Dabei liegt das Interesse an Mathematik bei den Mädchen meist auf den mittleren Rängen. Die Jungen hingegen befürworten das Fach deutlich stärker, wobei es mit Physik und Informatik häufig die vorderen Plätze belegt. Bei den Mädchen sind eher Sprachen und andere Fächer aus dem gesellschaftswissenschaftlichen Bereich beliebt.

KELLER (1998, S. 14) weist auf die Problematik dieser unterschiedlichen Präferenzen für Mädchen hin. Die Entwicklung der Anforderungen auf dem Arbeitsmarkt verlagern sich mehr und mehr in den mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bereich. In diesem Zusammenhang zeigen sich ebenso Unterschiede in der Beliebtheit der Computernutzung bei Jungen und Mädchen zu Gunsten der Jungen (SCHMIEDINGER, 1995). Für die Frauen kann dies eine Benachteiligung auf dem Arbeitsmarkt bedeuten, was insbesondere von der Schule ein erhöhtes Engagement zur Förderung der Mädchen in diesem Bereich fordert.

Befragt man die Mädchen, die Leistungskurs Mathematik gewählt haben, nach den Gründen dieser Wahl, so geben die meisten Mädchen Interesse und die antizipierte Nützlichkeit im Berufsleben an (vgl. BREHMER et al.,1989). Dabei beeinflussen wesentlich Beratungsgespräche mit der Lehrperson die Entscheidung der Schülerinnen, die in der Regel ihre eige-

[67] Es handelt sich um die konstruktivistische Sprechweise des Interessenmodells nach KRAPP (1992).

nen Leistungen sehr selbstkritisch sehen. Insofern ist es wichtig, dass Mädchen in ihrem Selbstkonzept unterstützt werden.

Ein Teil des Selbstkonzeptes der Mädchen ist das eigene Rollenverständnis. Auch wenn angestrebt ist, die Rollenzuweisungen abzubauen, existieren sie zum jetzigen Zeitpunkt. Das erfordert ein Ernstnehmen der Mädchen in ihrer Geschlechtlichkeit. Dies drückt sich beispielsweise in der Gestaltung von Unterrichtsmaterialen aus. Mädchen und Jungen sollten sich in den Aufgaben wiederfinden. Deswegen wurde bei der Konzeption der Aufgaben darauf geachtet, dass erstens Mädchen bzw. Frauen als Akteure darin vorkommen und zweitens, dass beide Geschlechter Interesse für die gestellten Themen entwickeln können.[68]

Der Stand der Forschung suggeriert, dass Mädchen ein geringeres Interesse an Mathematik besitzen. Die in dieser Arbeit vertretene Hypothese sagt, dass zumindest in dieser Lernumgebung keine signifikanten Unterschiede zwischen den Geschlechtern zu erwarten sind.

5.2.3 Die soziale Dimension

Kommunikative und soziale Fähigkeiten werden eher den Mädchen als den Jungen zugeschrieben.[69] Ein neues Verständnis von Arbeitsorganisation im Berufsleben, d.i. beispielsweise die Favorisierung von Teamfähigkeit, erfordert jedoch kommunikative und soziale Kompetenzen. Das in der Schule übliche Unterrichtsgespräch fördert diese Fähigkeiten nicht. Sozialformen wie Gruppenarbeit sind zur Unterstützung geeignetere Verfahren. Die in KLIP konstruierten Problemstellungen erfordern Teamfähigkeit von den Schülerinnen, die nur in organisierten sozialen Zusammenhängen umgesetzt werden kann. Das heißt zum Beispiel, dass Strategien zur Bewältigung des Problems besprochen, Arbeiten verteilt und die Ergebnisse anschließend wieder zusammengeführt und präsentiert werden müssen. Damit ist eine Zielperspektive von KLIP die Förderung sozialer und kommunikativer Kompetenzen. Inwieweit die Schülerinnen und insbesondere die Jungen dieses Angebot annehmen, wird zu untersuchen sein.

5.3 KLIP und der Abbau der Strukturkategorie *gender*

Eine Veränderung der geschlechtsspezifischen Zuschreibungen kann, wie oben bereits ausgeführt, nur von den Mädchen und Jungen selbst durchgeführt werden. Da die Strukturkategorie Geschlecht sozial konstruiert ist, müssen die Lernumgebungen, in denen Geschlecht permanent produziert wird, so gestaltet sein, dass sie dazu anregen, in individuellen und sozialen Prozessen die nachteiligen Differenzen zu neutralisieren.

Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Lernumgebung KLIP versucht diesen verschiedenen Ansprüchen gleichermaßen gerecht zu werden:

(1) Die Bereitstellung frei wählbarer Arbeitsgruppen gestattet den Jungen und Mädchen, Arbeitskonstellationen zu finden, in denen sie gemäß ihren sozialen Präferenzen mit Freunden und Freundinnen zusammenarbeiten können.[70] So können z.B. monoedukative Lernsituationen im koedukativen Kursverband entstehen.

68 Vgl. die Konzeption der Aufgaben in Kapitel 8.
69 Vgl. FAULSTICH-WIELAND, H. & NYSSEN, E. (1998).
70 Das gilt vermutlich nicht für alle Schülerinnen, da z.B. gewünschte Gruppen nicht zustande kommen.

(2) Die Auswahl an Intentionalen Problemen stellt den Schülerinnen einen an ihren Vorerfahrungen anknüpfenden Einstieg in den neuen Bereich bereit.[71]

(3) Die Bereitstellung des Computers unterstützt nicht nur die in Kapitel 4 genannten Fähigkeiten, sondern befähigt die Jungen und Mädchen zum Umgang mit neuen Medien.

(4) Die Interaktionen in den Gruppen und das Führen eines Forschungshefts fördern soziale, kommunikative und sprachliche Fähigkeiten bei den Jungen und Mädchen.

Somit werden durch die Lernumgebung sowohl Jungen als auch Mädchen gefördert, doch der Grad an Förderung für die Mädchen ist angesichts des üblichen Unterrichts höher zu bewerten.

Bei den möglichen Unterschieden zwischen den Geschlechtern wird sich, wie oben schon ausgeführt, am Stand der aktuellen Forschung orientiert.

Eine zentrale Fragestellung dieser Arbeit ist:

- Führt der Einsatz der Lernumgebung KLIP zum Abbau von Geschlechterdifferenzen hinsichtlich Leistung und Interesse am Mathematikunterricht?

[71] Wie in Kapitel 8 schon bemerkt, können die Intentionalen Probleme nicht jede Schülerin gleichermaßen ansprechen, doch es wird zumindest eine gewisse Vielfalt geboten.

TEIL 2

KLIP- ein konkretes Unterrichtsprojekt

KAPITEL VI

6 KLIP in der Integralrechnung

Das im ersten Teil entwickelte theoretische Konzept von KLIP hat in weiten Teilen einen Geltungsbereich, der über die Mathematikdidaktik hinausgeht. Hinsichtlich einer Umsetzung in der Praxis bedarf es daher weiterer Konkretisierungen für den Mathematikunterricht.

In diesem Teil soll der Konkretisierungsprozess und das dabei entstandene Produkt näher beschrieben werden. Dieses Produkt wird der Einfachheit halber ebenfalls KLIP genannt. Dazu werden die Genese des praktischen Produktes, das Unterrichtsdesign und die beteiligten Kurse beschrieben.

6.1 Die Genese von KLIP

Der konkreten Durchführung von KLIP in der Schule ging eine lange Planungsphase voraus. Sie setzt mit der Entwicklung des theoretischen Konzeptes an und endet mit der ersten konkreten Unterrichtsstunde.

Im Anschluss an die Theorieentwicklung wurden in einem Prozess von über einem Jahr verschiedene Intentionale Probleme entworfen. Dazu wurde die aktuelle didaktische Literatur[72] zu dem Thema Analysis in der Sekundarstufe II unter Einbeziehung des Computereinsatzes und unterschiedlicher Lehrbücher[73] eingehend studiert. Die Intentionalen Probleme wurden bei Schülerinnen und Studentinnen in Pretests hinsichtlich ihrer Tragfähigkeit geprüft. Aus Anfangs sieben Problemen wurden so vier Probleme ausgewählt.

In einer zweiten Phase wurden Lehrerinnen ausgewählt, die schon Unterrichtserfahrung mit dem Einsatz des Computers besaßen und den Ideen des sogenannten Offenen Unterrichts nahe standen. Sie wurden mit der Theorie des konstruktivistischen Unterrichts im Sinne von KLIP vertraut gemacht. Mit den vier Intentionalen Problemen setzten sie sich intensiv auseinander, wobei sie auch Gelegenheit hatten, diese zu modifizieren. Dies war notwendig, da eine offene Herangehensweise für dieses Konzept nicht ausreicht, sondern eine möglichst große Übereinstimmung mit eigenen Kernideen und Vorstellungen bei allen Lehrerinnen zur Gestaltung von Lernumgebungen angestrebt wurde. Zudem gelten die in dieser Arbeit aufgestellten Postulate des konstruktivistischen Lernens auch für die Lehrpersonen. Da jedoch zugleich eine Vergleichbarkeit zwischen den Kursen gewährleistet werden sollte, war die Wahlmöglichkeit eigener Kernideen für die beteiligten Lehrpersonen

---

[72] Z.B.: BAUMANN (1998), BENDER (1990), BLUM (1975, 1978, 1995), BLUM & KIRSCH (1979), BLUM & TÖRNER (1983), BÖHM (1992), BRÜNING (1994), BUSSMANN & WENZELBURGER (1977), FRAUNHOLZ (1999), GRIESEL & POSTEL (1988), KAYSER (1996), KOEPF (1993), KÖHLER (1998), KOKOL-VOLJC (1999), PESCHEK (2000), KNOCHE & WIPPERMANN (1986), TIETZE et al. (2000).

[73] Z.B. :BAUMANN (1998), HAHN & DZEWAS (1990), KEIL (1991), KROLL (1985), KROLL & VAUPEL (1989).

nicht gegeben. Letztendlich wurden drei Probleme mit geringfügigen sprachlichen Modifikationen ausgewählt.

Daran anschließend wurde die konkrete Durchführung des Projekts mit den Lehrerinnen erarbeitet. Diese Phase führte zu folgender Festschreibung des Unterrichtsdesigns:

- Die Schülerinnen erhalten zu Beginn der Unterrichtsreihe Informationen über die Kerngedanken des Projektes, d.h. über Inhalte, Verlauf und Zielperspektive.
- Die Schülerinnen erhalten des Weiteren die drei Intentionalen Probleme, deren Bearbeitungsreihenfolge sie selbst auswählen können. Alle drei Probleme sollen bearbeitet werden.
- Sie arbeiten in selbstgewählten Gruppen von höchstens fünf Schülerinnen zusammen. Eine Anzahl von drei bzw. vier Schülerinnen pro Gruppe ist anzustreben.
- Die Lehrerinnen unterstützen den Bearbeitungsprozess mit methodischer Hilfe. Falls in Einzelfällen motivationale Probleme zu befürchten sind, kann auch durch geringe fachliche Unterstützung geholfen werden.
- Die Bearbeitung der Probleme wird an geeigneten Stellen durch Präsentations- und Reflexionsphasen unterbrochen, die zur divergierenden Begriffsbildung genutzt werden.[74] In diesen Phasen werden die Ergebnisse diskutiert, reflektiert und gegebenenfalls modifiziert. Es werden eventuell alte Fragestellungen verworfen und neue Fragen gestellt.
- Die jeweiligen Präsentationsformen sind den Schülerinnen freigestellt.
- Jede Schülerin aus den computergestützten Kursen soll die Gelegenheit besitzen sowohl in der Schule als auch zu Hause mit dem Computer zu arbeiten.
- Jede Schülerin führt ein individuelles Forschungsheft, dessen Struktur vorgegeben ist.[75]
- Das Projekt endet, wenn auf Grundlage der Probleme weder eine weitere Bearbeitung noch weitere Verallgemeinerungen möglich sind. Hier ist die Lehrerin insofern einbezogen, als dass sie keine Perturbationsmöglichkeiten mehr sieht, den Lernprozess der Schülerinnen weiter anzustoßen.[76]
- Hinsichtlich der Begriffsbildung besteht für die Schülerinnen die Vorgabe, ihre am Konkreten entwickelten Begriffe zu verallgemeinern.
- Am Ende der für diesen Kurs spezifischen Begriffsbildung steht die Phase des Informierens über das reguläre Wissen durch die Lehrerin, die sogenannte dritte Phase. Diese Phase dient dazu, die regulären Begriffe zur Kenntnis zu nehmen, sie mit den selbst aufgebauten Begriffen zu vergleichen und diese unter Umständen zu modifizieren mit der Zielperspektive, eine für weitere Forschungen gemeinsame Sprache zur Verfügung zu haben.[77]

---

[74] Vgl. Abschnitt 1.3. Diese Einschnitte werden von den Lehrpersonen in Absprache mit den Schülerinnen in den jeweiligen Kursen bestimmt.
[75] Vgl. Abschnitt 2.4 und Mathewerkstatt (HUßMANN, 2000).
[76] Es ist natürlich auch denkbar, dass keines der Probleme die Schülerinnen motiviert eigene Kernideen hervorzubringen. In diesem Fall wird genau analysiert, warum das Problem für die jeweilige Lerngruppe keine Kernidee war.
[77] Für Schülerinnen, die möglicherweise in andere Lerngruppen wechseln, schafft das die Sicherheit, dass ihr Wissen kompatibel ist.

- Je nach gewähltem Arbeitsweg haben die Schülerinnen ein oder mehrere Integralbegriffe unter unterschiedlichen Aspekten und Grundvorstellungen entwickelt. Es ist sogar denkbar, dass beide Teile des Hauptsatzes der Integralrechnung und die für die Problembearbeitung notwendigen Rechenregeln der Integralrechnung entwickelt wurden. Sollte dies nicht der Fall sein, werden die Schülerinnen gebeten, ihre Ergebnisse zu verallgemeinern und zu einer mathematischen Theorie auszubauen.
- Die Schülerinnen werden am Anfang des Schuljahres in einer Unterrichtsreihe zur Wiederholung der Differentialrechnung auf Offene Aufgaben[78] vorbereitet. Dies soll die Schülerinnen in die Bedienung der Computer, den Umgang mit den Forschungsheften und den Werkstattunterricht einführen.
- Die Lehrerinnen tauschen sich regelmäßig über den Verlauf des Projektes aus und führen selbst ein Forschungsheft, in dem die Entwicklung hinsichtlich der drei Dimensionen in ihrem jeweiligen Kurs dokumentiert wird.

Die praktische Durchführung des Projekts beginnt im September 2000 und endet spätestens im Januar 2001.[79] An KLIP haben insgesamt vier Schulkurse teilgenommen. Zum Ende der Untersuchung kamen zwei Kontrollkurse hinzu.

6.2 Die teilnehmende Population

Zwei der vier Kurse waren Leistungskurse und die anderen beiden Grundkurse.[80] Zwei Kurse arbeiteten mit dem Computeralgebra-System DERIVE, ein Grundkurs mit dem TI89[81] und einer der beiden Leistungskurse diente als Kontrollgruppe hinsichtlich der Auswirkungen des Computereinsatzes und arbeitete ohne Computerunterstützung.[82] Im Folgenden werde ich der Einfachheit halber die einzelnen Lerngruppen wie in Tabelle 6.1 dargestellt benennen, wobei das U für die „Teilnahme am Unterrichtsversuch“, das O als dritter Buchstabe für „nicht am Unterrichtsversuch teilgenommen“, das C für Computer und das O als letzter Buchstabe für „ohne Computer“ steht. Die beiden Grundkurse mit DERIVE und dem TI92 werden hier nicht unterschieden. Die Zahlen 1 und 2 dienen zur weiteren Unterscheidung der beiden Grundkurse und zur Zuordnung des Kontrollkurses zu dem entsprechenden Grundkurs:

[78] Ein Teil der Aufgaben findet sich in der Mathewerkstatt (HUßMANN 2000) unter dem Thema Differentialrechnung.
[79] Je nach Kurs differierten die Anfangs- und Endzeiten.
[80] Zur Erläuterung vgl. KULTUSMINISTERIUM VON NRW (1999).
[81] Mögliche Unterschiede, die sich durch die Verwendung von DERIVE und dem TI ergeben können, werden hier nicht problematisiert. Ein Nachteil von DERIVE gegenüber dem TI liegt darin, dass DERIVE nicht portabel ist und für die Nutzung zu Hause sowohl eine Lizenz, als auch ein Computer zur Verfügung stehen muss. Dank der Unterstützung der Firma Texas Instruments und der Universität Essen war es möglich allen Schülerinnen auch zu Hause den unbeschränkten Zugang zu DERIVE zu ermöglichen.
[82] Die dritte Problemstellung ist entsprechend modifiziert, so dass sie auch ohne Computereinsatz zu lösen ist (vgl. Fußnote 93).

Tabelle 6-1. Beschreibung der Kurse

Name	Kursart	Teilnahme am Unterrichtsversuch	Computernutzung
LKUC	Leistungskurs	Ja	Ja (Derive)
LKUO	Leistungskurs	Ja	Nein
GKUC1	Grundkurs	Ja	Ja (Derive)
GKUC2	Grundkurs	Ja	Ja (TI)
LKOO	Leistungskurs	Nein (Kontrollkurs zu LKUC)	Nein
GKOO1	Grundkurs	Nein (Kontrollkurs zu GKUC1)	Nein

Die anderen beiden Lerngruppen haben an KLIP nicht teilgenommen, sondern sind als Kontrollgruppen am Abschlusstest beteiligt. Bei diesen zwei Lerngruppen handelt es sich jeweils um Parallelkurse an den beiden Schulen der Kurse LKUC und GKUC1. Es handelte sich entsprechend um einen Leistungskurs und einen Grundkurs. An der Schule ohne Computereinsatz existierte kein entsprechender Parallelkurs. In den vier Schulen waren insgesamt eine Lehrerin (GKUC2) und drei Lehrer beteiligt, wobei der Leistungskurs LKUC durch mich selbst unterrichtet wurde.

Eine detaillierte Beschreibung der Kurse, d.h. z.B. die Anzahl an Schülerinnen und Schüler, erfolgt in Kapitel 9 im Rahmen der empirischen Auswertung.

KAPITEL VII

7 Der Integralbegriff

Der Integralbegriff gehört zu den schwierigen Begriffen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe II und die didaktischen Vorschläge zur schulischen Behandlung sind entsprechend zahlreich.[83] Unterrichtsorganisatorisch folgt aus dem Grund die Integralrechnung vermutlich auch der Differentialrechnung und wird nicht parallel dazu eingeführt. Inwieweit eine parallele Behandlung sinnvoll wäre, soll hier nicht diskutiert werden, da die Ausgangssituation der Untersuchung die ist, dass die Schülerinnen in der Jahrgangsstufe 11 nach den neuen Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen (1999) vorgegangen sind und somit die Einführung der Differentialrechnung schon behandelt haben.

Hinsichtlich der Integralrechnung sind die zentralen Fragen dieses Schulversuchs:

1. Welchen Zugang zur Integralrechnung wählen die Schülerinnen?
2. Welche Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff bilden sich dabei heraus bzw. wie sind die Aspekte und Grundvorstellungen gewichtet?
3. Wie ist die Beziehung der durch die Schülerinnen entwickelten Begriffe und den Intentionalen Problemen?

Für die didaktische Konzeption der Unterrichtsreihe bedeutet das, dass nicht *ein* bestimmter Zugang zum Integralbegriff gewählt wird. Es muss vielmehr eine Kernidee zum Integralbegriff bereitgestellt werden, in der sich die singuläre Position der Lehrerin wiederfindet. Diese Kernidee wird auf Basis der Rückschau entwickelt, was wiederum bedeutet, dass sich in ihr die aktuelle didaktische Diskussion widerspiegeln sollte. Ziel dieses Abschnittes ist somit die Offenlegung meiner Motive auf Grundlage der gegenwärtigen Didaktik der Integralrechnung. Aus diesem Grund werden im Folgenden verschiedene Zugänge zum Integralbegriff und entsprechende Aspekte und Grundvorstellungen skizziert und bewertet.

7.1 Zugänge zum Integralbegriff

Der in der Schule üblicherweise behandelte Integralbegriff ist der des *Riemann-Integrals*. Andere Integralbegriffe wie beispielsweise das *Lebesgue-Integral* spielen auf Grund ihrer Allgemeinheit keine Rolle. Dies erscheint auch sinnvoll, da der „klassische" Integralbegriff

[83] Vgl. z.B. BENDER (1990), BLUM (1995), BLUM & KIRSCH (1979), BLUM & TÖRNER (1983), BÖHM (1992), BUSSMANN & WENZELBURGER (1977), FRAUNHOLZ (1999), KIRSCH (1976, 1996), KNOCHE & WIPPERMANN (1986), REICHEL (1974), TIETZE, KLIKA & WOLPERS, H. (2000).

für die in der Schule diskutierten Funktionenklassen immer noch ausreichend ist. Interessant für die Schule könnte zudem das *Regel-Integral* sein, das auf der Klasse der *Regelfunktionen*[84] definiert ist. Durch diese Einschränkung können zwar weniger Funktionen als bei der Riemann-Integrierbarkeit betrachtet werden[85], doch sind die in der Schule diskutierten stetigen und stückweise stetigen Funktionen durchweg Regelfunktionen. Die Verwendung eines Ähnlichkeitsmaßes[86] zur Approximation von Regelfunktionen durch Treppenfunktionen bietet die Möglichkeit die Fundamentale Idee der *Approximation* deutlicher herauszuarbeiten, wie es von den neuen Richtlinien für Sekundarstufe II des Landes NRW (1999) gefordert wird. Aber auch Beweise wie die Integrierbarkeit stetiger Funktionen gelingen einfacher als beim Riemann-Integral (vgl. REICHEL, 1974, S. 187).

Hinsichtlich der Begriffsbildung und ausgehend vom Riemann-Integral fällt auf, dass die Notwendigkeit, den Flächeninhalt einer Fläche unter einem Funktionsgraphen durch die „Einschachtelung" von Ober- und Untersummen zu bestimmen, in vielen Schulbüchern einfach vorausgesetzt, die Übereinstimmung der Grenzwerte dann aber nur selten bewiesen (vgl. z.B. KEIL, 1991, S. 202) wird. Auch die Anknüpfung an Vorerfahrungen hinsichtlich der Bestimmung des Flächeninhalts eines Kreises sind kein überzeugendes Argument. Andere Begründungen für die Notwendigkeit eines Zuganges zum Integralbegriff über das Riemann-Integral werden selten gegeben, und sie scheinen sich bei den in der Schule zu behandelnden Funktionenklassen auch nicht aufzudrängen (vgl. REICHEL, 1974, S. 167f.).

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Zugängen des Riemann- und des Regelintegrals liegt in der Abschätzung der Güte der Approximation. Während beim Riemann-Integral die Güte über „Flächeninhaltsdifferenzen" ermittelt wird, geschieht dies beim Regelintegral über die gleichmäßige Approximation. Ein Einwand gegen das Regelintegral, der in diesem Zusammenhang von KNOCHE & WIPPERMANN (1986) zitiert wird, ist der, dass der Approximationsgedanke beim Regelintegral nicht so anschaulich wie die „Flächeninhaltsdifferenzengüte" und darüber hinaus auch nicht historisch begründet ist (ebd., S. 274). Die Güte der Approximation über die „Flächeninhaltsdifferenzen" zu bestimmen ist aber nur dann anschaulicher, wenn man den Flächeninhaltsaspekt favorisiert. In anwendungsbezogenen Aufgaben, in denen häufiger der Mittelwertaspekt dominiert, ist die Approximationsgedanke der Regelfunktionen wesentlich ausdrucksvoller.

Ziehen wir jedoch, wie oben gefordert, die historische Begründung hinzu bei gleichzeitiger Betrachtung der verwendeten Funktionenklassen in der Schule, so müssen wir den Streit zwischen diesen beiden Zugängen gar nicht weiter fortführen, da sich eine dritte Möglichkeit anbietet: Der Zugang über das *Cauchy-Integral*. CAUCHY brach mit der Vorstellung BERNOULLIS, Integrieren als Umkehrung des Differenzierens zu betrachten, und definierte das bestimme Integral als Grenzwert von „Links-Summen". Er zeigte, dass dieses Integral für abschnittsweise definierte Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen existiert. Hier wird ein Integralbegriff zur Verfügung gestellt, der die Schülerinnen hinsichtlich des Regelintegrals davon entlastet, sich mit der nicht so leicht verständlichen Supremumsnorm

---

[84] Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, falls eine Folge t_n von Treppenfunktionen existiert, durch die f gleichmäßig approximiert wird. Unter einem *Regelintegral I* versteht man dann $I(f):=\lim_{n\to\infty} I(t_n)$, wobei

$$I(t_n):=\sum_{i=0}^{n-1} c_{ni}(x_{i+1}-x_i) \text{ mit } t_n(x):=c_{ni} \text{ für } x\in[x_i,x_{i+1}] \text{ und } a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

[85] $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ für $x\neq 0$ und $f(x)=0$ für $x=0$ ist z.B. keine Regelfunktion.

[86] Als Ähnlichkeitsmaß für zwei Funktionen $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ wird $\Delta(f,g)=\sup_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|$ verwendet.

auseinander zu setzen, und hinsichtlich einfacher Berechnungen des Riemann-Integrals die Einschränkung auf monotone Funktionen vorzunehmen[87].

Sollte der Schwerpunkt des Unterrichts auf numerischen Verfahren liegen, so reicht das Cauchy-Integral nicht mehr aus. Es müssen Verfahren der numerischen Integration wie die Trapezregel oder das Simpsonverfahren herangezogen werden, die es ermöglichen Konvergenzgeschwindigkeiten abzuschätzen. Zwar erweist sich auch das Riemann-Integral hinsichtlich der Approximation als ein sinnvolles Werkzeug, das Regelintegral mit der Supremumsnorm und einer flexiblen Verwendung von Treppenfunktionen enthält jedoch schon das Konzept der Kurvenapproximation und ist damit ungemein stärker als das starre Konzept von Ober- und Untersummen.

Hinsichtlich der Behandlung von Funktionen, zu denen sich explizit keine Stammfunktion angeben lässt[88], ist ein numerischer und approximativer Zugang ebenfalls zweckmäßig. Neben der für die Schülerin wertvollen Einsicht, dass Funktionen existieren, zu denen sich keine Stammfunktion angeben lässt, können sie sich so in die Lage versetzen, trotzdem das gewünschte Integral zu bestimmen.

Ein Zugang, der in vielen Schulbüchern und fachwissenschaftlichen Büchern am Anfang steht, ist der Zugang über die Stammfunktion. Dieser Zugang bietet sich an, wenn die Integralrechnung der Differentialrechnung folgt und man so das Integrieren als Umkehren des Differenzierens problematisieren kann. Dieses Konzept ist fruchtbar hinsichtlich der Anknüpfung an das Vorwissen der Schülerin und der Verfügbarkeit eines starken Werkzeugs zur Berechnung von Integralen, aber auch ebenso problematisch, da der Eindruck entstehen könnte, dass dieser Zusammenhang für jeden Integralbegriff gilt.

Der Vorteil des von mir entwickelten Konzeptes KLIP liegt nun darin, dass ich keinen dieser Zugänge vorgebe, sondern Kernideen gestalte, die die Möglichkeit enthalten, *jeden* dieser Zugänge zu wählen, oder deutlicher formuliert: *jeden* dieser Zugänge zu *erfinden*. Dabei wird der jeweilige Zugang auf Grund seiner Viabilität zur Problemlösung entwickelt. Verschiedene Probleme erfordern möglicherweise verschiedene Konstrukte, so dass die Schülerinnen im Laufe der Unterrichtsreihe theoretisch sogar *jeden* dieser Zugänge wählen können.

Hinsichtlich des Einsatzes von CAS innerhalb von KLIP sollte man beachten, dass durch die rasante Entwicklung im technologischen Bereich es mittlerweile möglich ist, fast jedes Integral mit CAS zu berechnen. Dies erfordert für den Unterricht eine tiefere Einsicht in den Integralbegriff und weniger das Erlernen möglichst vieler Integrationsregeln. Es rechtfertigt bzw. es fordert sogar den Einsatz von CAS.[89]

7.2 Aspekte des Integralbegriffs

Unter den Aspekten eines Begriffs verstehe ich die verschiedenen Blickwinkel auf den Begriff. Jeder Blickwinkel eröffnet der Betrachterin ein anderes Charakteristikum des Begriffs. In der didaktischen Literatur und in den Schulbüchern findet man im Wesentlichen zwei Aspekte des Integralbegriffs, die scheinbar nichts miteinander zu tun haben: (1) Der *Flächeninhaltsaspekt (F-Aspekt)* und (2) der *Stammfunktionsaspekt (S-Aspekt)*. Ein weiterer Aspekt, der jedoch insbesondere bei der Einführung der Integralrechnung nicht so häufig Anwendung findet, ist (3) der *Mittelwertaspekt (M-Aspekt)*. Durch eine neue Akzentuierung

[87] Vgl. BRÜNING (1994).

[88] e^{-x^2} ist eine derartige Funktion, die darüber hinaus für die Anwendung von großer Bedeutung ist.

[89] Vgl. dazu Kapitel 4.

der Unterrichtsinhalte in der Sekundarstufe II zu Gunsten der Stochastik kann sich diese Gewichtung der Aspekte in Richtung des dritten Aspektes verschieben. Doch auch unabhängig davon ist eine zu starke Betonung des F-Aspektes nicht sinnvoll, da dieser ein Verständnis der Anwendungsmöglichkeiten der Integralrechnung vielfach erschwert. Eine zu starke Betonung des M-Aspektes hat natürlich ebensolche Folgen. Als einen vierten Aspekt ergänze ich (4) den *Approximationsaspekt (A-Aspekt)*, der sich zum einen hinsichtlich der Flächenapproximation und zum anderen hinsichtlich der Approximation der Funktion verstehen lässt und damit ein wesentlicher Aspekt des Riemann-Integrals als auch des Regel-Integrals ist. Durch diesen Zugang wird ähnlich wie schon beim M-Aspekt einer frühzeitigen Fixierung auf den F-Aspekt entgegengewirkt. Hinzu kommt, dass die Idee der lokalen Approximation in der Differentialrechnung der der globalen Approximation in der Integralrechnung gegenüber gestellt wird. Dies macht einen wichtigen Zusammenhang von Integral- und Differentialrechnung deutlich.

Im Sinne eines reichhaltigen Repertoires an Aspekten eines Begriffes wäre daher eine ausführliche Behandlung aller vier Aspekte eine sinnvolle Herangehensweise. Der Frage, inwieweit dies zeitlich überhaupt möglich und für einen Grundkurs sinnvoll ist, soll in der nachfolgenden Untersuchung ebenfalls nachgegangen werden.

7.3 Zwei Grundvorstellungen

Auch wenn alle vier Aspekte als eigenständige Aspekte betrachtet werden können, lassen sie sich wegen des Hauptsatzes auf einen gemeinsamen Aspekt zurückführen: (5) den Kumulationsaspekt[90]. Unter *Kumulation* versteht man den Prozess des Aufsummierens von Teilprodukten. Dieser ist in meinen Augen essentiell für den Integralbegriff und wird daher auch als erste Grundvorstellung zum Integralbegriff bezeichnet. Die Kumulation der Teilprodukte entspricht anschaulich der Fläche zwischen dem Graphen der Randfunktion und der x-Achse. Im Gegensatz zum F-Aspekt können nun auch negative Werte problemlos interpretiert werden. Beschreibt die Randfunktion beispielsweise die Änderungsrate von Wasserzufluss bzw. Wasserabfluss, so lassen sich negative Werte als Abfluss interpretieren. Die Gesamtfläche heißt *Gesamteffekt*. Dieser Begriff stellt für mich die zweite zentrale Grundvorstellung des Integralbegriffs dar. Der lokalen Änderungsrate der Differentialrechnung wird der globale Gesamteffekt der Integralrechnung gegenübergestellt.

Was die beiden Grundvorstellungen vor anderen auszeichnet, ist, dass sie die Funktion des Werkzeuges Integralrechnung sowohl als Zielrichtung als auch als Prozess herausstellen. Der Gesamteffekt ist das Ziel und die Kumulation stellt den Weg dahin dar. Oder anders gesagt, die Bestimmung des Gesamteffekts ist der Anstoß, der Zweck einer Handlung und die Kumulation ist als Werkzeug zur Erlangung dieses Zweckes viabel.

Sollten die Schülerinnen den Integralbegriff über den Weg der Kumulation und der Vorstellung des Gesamteffekts erschließen, gelangen sie über den Effekt der Änderungsrate f über das Teilintervall [a; x] zur *Integralfunktion* $I_a(x) := \int_a^x f(t)dt$. Der Vergleich von f und I_a kann die Schülerinnen dann zum S-Aspekt und zum Hauptsatz führen.

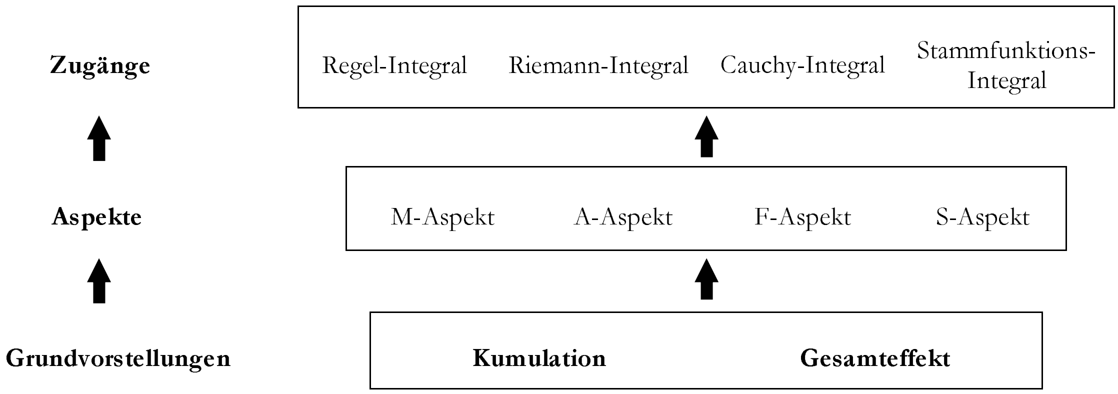
Beginnen die Schülerinnen jedoch mit dem S-Aspekt, gelangen sie notwendig zur Kumulation und zum Gesamteffekt, sobald sie den leeren Begriff der „Umkehrung des Differenzierens“ mit Anschauung füllen. Beide Wege führen zu einem Grundgedanken der Inte-

[90] Vgl. BENDER (1990), BUSSMANN & WENZELBURGER (1977), TIETZE et al. (2000).

gralrechnung: „Das Integral $\int_a^b f$ einer Funktion f in einem Intervall [a; b] ist eine Zahl, die aus einem Grenzprozess hervorgeht und das Ergebnis einer Kumulation angibt“ (Tietze et al., 2000, S. 281).

Zusammenfassend sind die in dieser Arbeit verwendeten Zugänge, Aspekte und Grundvorstellungen in der Abbildung dargestellt. Die Pfeile stellen die am Begriffsbildungsprozess orientierte Kausalität dar. Die Anordnung der Aspekte unter den Integralbegriffen soll die Gewichtung der Aspekte im jeweiligen Integralbegriff verdeutlichen.

Abbildung 7.1. Begriffe, Aspekte und Grundvorstellungen der Integralrechnung



KAPITEL VIII

8 Die Intentionalen Probleme

Im nachfolgenden Abschnitt werden die zur Einführung der Integralrechnung verwendeten Intentionalen Probleme vorgestellt.[91] Im zweiten Abschnitt lege ich dar, warum es sich um Kernideen handelt und welche Funktion der Computer zur Problemlösung und zur Bildung des Integralbegriffs einnimmt.

8.1 Intentionale Probleme zum Integralbegriff

8.1.1 Wasserverbrauch in Bochum

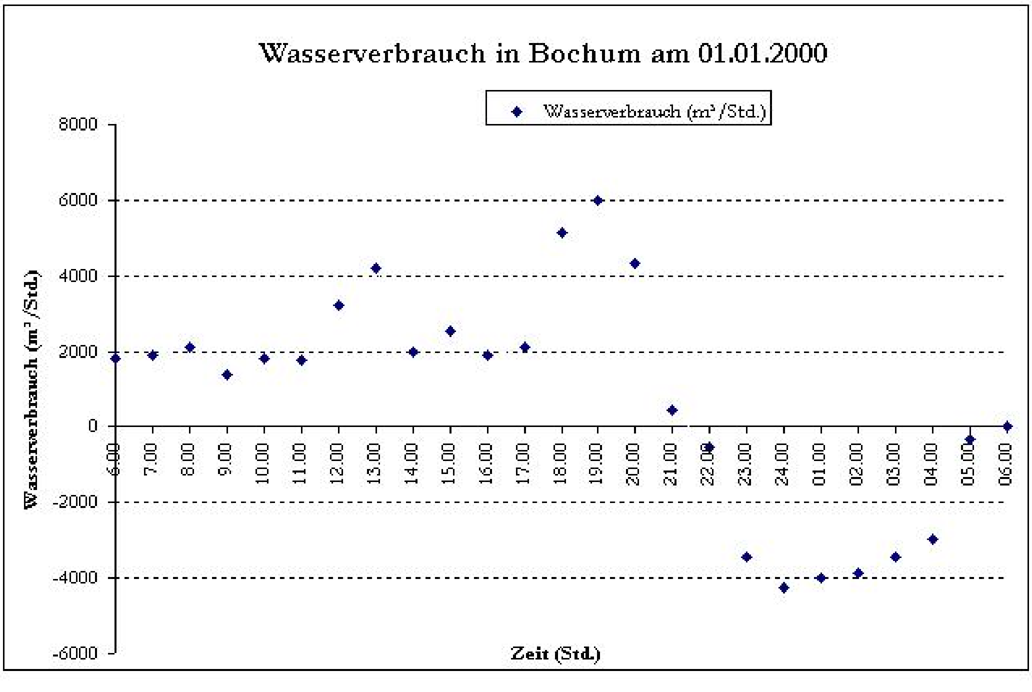


Abbildung 8.1. Wasserverbrauch in Bochum

Der größte Teil Bochums wird mit Trinkwasser der Wasserwerke in Stiepel und Essen-Horst versorgt. Ausgenommen hiervon sind die Ortsteile Werne und Langendreer. Hier liefert das Verbund-Wasserwerk Witten das Wasser. Das Wasserwerk Stiepel wurde 1910 von den Stadtwerken Bochum gebaut. Es umfasst Ruhrstau, Wasserkraftanlage, Wassergewin-

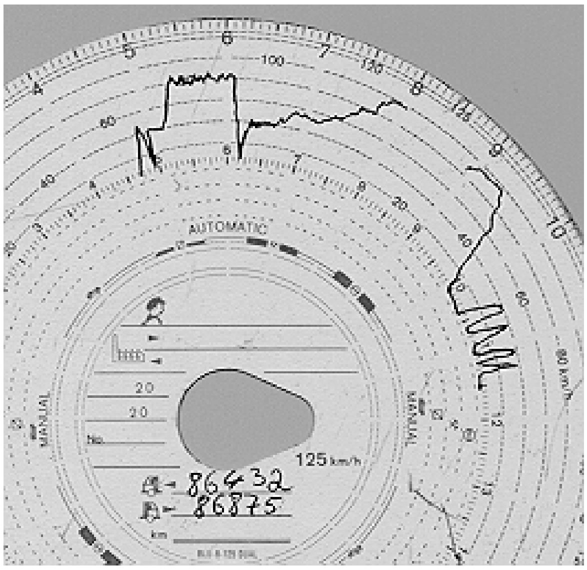
[91] Hier sind lediglich die Problemstellungen und einige Abbildungen abgedruckt. Für die komplette Hypertextversion vgl. HUẞMANN (2000).

nungsanlage und Pumpwerk. Um die Bevölkerung jeder Zeit mit Wasser zu versorgen, ist es wichtig, dass die Anlage optimal ausgenutzt wird. Ausgangspunkt für die optimale Ausnutzung ist der aktuelle Verbrauch der Bevölkerung. Dieser wird mit Hilfe von Fühlern, die in den Verbrauchswasserstrom ragen, gemessen. Damit immer Wasser vorhanden ist, wird Wasser gewonnen und aufbereitet und den Wasserbecken zugeführt. Dieser Zustrom wird ebenfalls mit entsprechenden Fühlern gemessen. Für den Verlauf eines Tages geben die Tabelle[92] und die zugehörige Abbildung (vgl. Abbildung 8.1) die im stündlichen Abstand gemessenen Werte an. Bei den Werten handelt es sich um den momentanen Wasserverbrauch. Die Stadtwerke Bochum nutzen die Tageskurven, um Prognosen hinsichtlich der optimalen Wassergewinnung für zukünftige Tage treffen zu können.

8.1.2 Der Fahrtenschreiber

In Abbildung 8.2 ist eine Tachoscheibe zu sehen, die in Bussen und Lastkraftwagen benutzt werden muss. Gründe für diese Maßnahme sind in der Erhöhung der Sicherheit auf den Straßen zu sehen, die zunehmend durch Überschreiten von Fahrzeiten und Geschwindigkeitsmissachtungen der LKW- und Busfahrer gefährdet wurden und somit auch heute noch erhebliche Personen- und Sachschäden verursachen. Das Gerät soll die Einhaltung der bestehenden Sozialvorschriften und der entsprechenden Gesetze gewährleisten sowie die Überprüfbarkeit und Gerichtsverwertbarkeit der im Gerät gesammelten Daten bei erhöhtem Manipulationswiderstand garantieren.

Abbildung 8.2. Der Fahrtenschreiber



In einer Spedition in Bochum sind mehrere Fahrer und Fahrerinnen angestellt, die täglich verschiedene Großmärkte in ganz Deutschland beliefern. Auf der Rückfahrt von München nach Bochum wird Frau Grat, eine Fahrerin der Spedition, von der Autobahnpolizei angehalten. Die routinemäßige Kontrolle gilt der Verkehrssicherheit des LKW. Bei der Überprüfung der Tachoscheibe (Abbildung 8.2) entdecken die Polizeibeamten einen relativ großen Zeitraum, in dem auf der Scheibe keine Geschwindigkeit eingetragen ist. Auf der Tachoscheibe werden die gefahrenen Geschwindigkeiten während der gesamten Fahrt in einem Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm festgehalten. Auf Nachfrage gibt Frau Grat an, dass sie in dieser Zeit eine Pause an einer Raststätte gemacht habe. Zum Beweis ihrer Behauptung verweist Frau Grat auf die gefahrenen Kilometer.

[92] Die Tabelle ist hier nicht abgedruckt. Für die vollständige Version vgl. HUßMANN (2000).

8.1.3 Geschlechterdifferenzen beim Wachstum

In der Abbildung 8.3 sind zwei Kurven zu sehen. Sie stellen die Wachstumsraten einer Gruppe von Jungen und einer Gruppe von Mädchen dar. Die Kurven approximieren Daten, die aus einer Längsschnittstudie bei einer für Mitteleuropa repräsentativen Gruppe von Menschen gewonnen wurden. Die den Kurven zu Grunde liegenden Daten sind Mittelwerte aus den gemessenen Wachstumsgrößen der jeweiligen Gruppe. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit sind diese Datenpunkte nicht dargestellt.

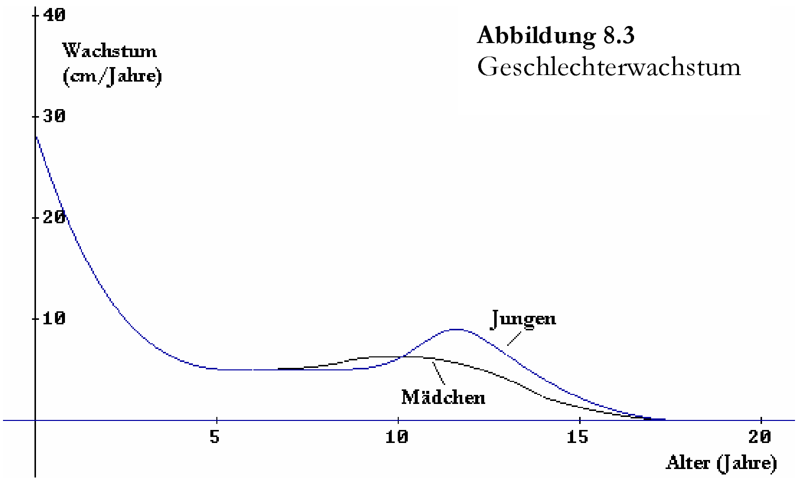


Abbildung 8.3
Geschlechterwachstum

$$K_M(x) := \begin{cases} -0{,}0973 \cdot x^3 + 1{,}8312 \cdot x^2 - 11{,}407 \cdot x + 28{,}4909 & 0 < x \le 6 \\ 0{,}00017733 \cdot e^x + 4{,}92845 & 6 < x \le 8{,}5 \\ -0{,}243877 \cdot x^2 + 4{,}84906 \cdot x - 17{,}7548 & 8{,}5 < x \le 14 \\ \frac{23}{160} \cdot (x-18)^2 & 14 < x \le 18 \end{cases}$$

$$K_J(x) := \begin{cases} -0{,}0973 \cdot x^3 + 1{,}8312 \cdot x^2 - 11{,}407 \cdot x + 28{,}4909 & 0 < x \le 6 \\ 4 \cdot e^{\frac{-(x-11{,}6)^2}{2}} + 5 & 6 < x \le 13 \\ -0{,}275762 \cdot x^2 + 9{,}84747 \cdot x - 87{,}9133 & 13 < x \le 18 \end{cases}$$

Abbildung 8.4. Funktionsgleichungen zum Geschlechterwachstum

Welche Informationen kann man den Kurven entnehmen? In welchen Altersabschnitten sind die Jungen größer als die Mädchen?[93]

8.2 Diskussion der Intentionalen Probleme

Zur Erörterung der Problemstellungen werde ich zuerst das Gesamtkonzept der Intentionalen Probleme vorstellen und fundieren. Dazu werde ich die Aspekte herausstellen, die allen drei Problemstellungen innewohnen. Im zweiten Teil dieses Abschnittes werde ich die Problemstellungen einzeln diskutieren, indem ich sie als hinreichend für eine konstruktivistische Lernumgebung herausarbeite, ihren Gehalt als Problemstellung hinsichtlich des Integralbegriffs und zuletzt die Funktion des Computers zur Problemlösung darstelle.

---

[93] Die Schülerinnen aus dem Kurs LKUO hatten bei dieser Aufgabe die vereinfachten Funktionsgleichungen

$K_M(x) = -\frac{1}{8}(x-9)^2 + 7$ ***für*** $5 \le x \le 14$ und

$K_J(x) = 5$ ***für*** $5 \le x \le 6$ & $K_J(x) = -\frac{1}{27}x^3 + \frac{8}{9}x^2 - 6x + 17$ ***für*** $6 < x \le 14$.

8.2.1 Das Gesamtkonzept

Die Integralrechnung gehört, wie oben schon erwähnt, zu den schwierigen Bereichen der Schulmathematik. Verschiedene Zugänge und Aspekte des Integralbegriffs und zentrale Sätze der Analysis lassen sich in diesem Themenkreis bearbeiten. Im Abschnitt zur Integralrechnung habe ich deutlich gemacht, dass sich die Gemeinsamkeiten dieses Facettenreichtums in den beiden Grundvorstellungen Kumulation und Gesamteffekt zuspitzen. Um den Blick auf das Ganze bereit zu stellen, sollte aus Sicht der Lehrerin *jede* Problemstellung zur Integralrechnung diese Aspekte enthalten, jedoch *eine* Problemstellung zu schaffen, die es ermöglicht, sie unter allen Zugängen und allen Aspekten zu erschließen, ist nicht möglich. Das liegt im Wesentlichen daran, dass die einzelne Problemstellung nicht allen Zugängen und Aspekten wesentlich verwandt ist, d.h. je nach gegebenen Datenmaterial und Kontext kann sich ein Zugang weniger nützlich und weniger sinngebend als ein anderer darbieten. Ferner ist anzunehmen, dass nach Lösung des Problems keine Motivation für die Schülerinnen mehr besteht, die Problemstellung unter einem anderen Zugang erneut zu problematisieren. Es wäre sogar kontraproduktiv, da die Spezifität des erarbeiteten Zugangs und damit die Verankerung genau dieser Perspektive bei der Schülerin durch viele Blickwinkel verschwimmen würde. Das Kriterium der orientierenden Funktion einer Problemstellung ginge verloren. Erst wenn die einzelnen Facetten des neuen Begriffs konsolidiert sind, macht es im Rahmen des Abstraktionsprozesses Sinn und besteht auch wieder die Motivation bei den Schülerinnen diese an der konkreten Problemstellung zu vergleichen. Insofern bieten alle drei Intentionalen Probleme als einzelne den Blick auf das Wesentliche und stecken das Gebiet der Integralrechnung ab. Als Ganzes betrachtet wachsen sie auf Grund ihrer Überschneidungen in den Grundvorstellungen und ihrer Komplementarität und Vollständigkeit hinsichtlich der geforderten Zugänge und Aspekte über die Summe ihrer Teile hinaus und gewinnen Gestalt als *eine* große Problemstellung. Dies zeigt sich insbesondere an den Stellen, an denen sich Hindernisse im Lösungsprozess zeigen. Die Unterbrechung dieser aktuellen Bearbeitung zu Gunsten eines anderen Problems kann einen weiteren Zugang herausstellen, welcher wiederum das Gesichtsfeld hinsichtlich des zuvor erkannten Hindernisses erweitert.

Kernideen sollen die Schülerinnen zum Handeln motivieren. Nicht jede Schülerin ist aber mit derselben Problematik zu begeistern. Darüber hinaus ist es nicht möglich, die Lernbiographie aller Schülerinnen in verschiedenen Lerngruppen zu studieren. Die Intentionalen Probleme sind somit Produkt meiner Mutmaßungen der Schülerinneninteressen und meiner eigenen Begeisterung für die Problemstellungen. Die Übersetzung einer von mir so gestalteten Kernidee in eine Kernidee der Schülerin bietet der Schülerin zwar Variationsmöglichkeiten, für sich angemessen eine Kernidee zu formulieren, allerdings ist es utopisch, anzunehmen, *alle* Schülerinnen lassen sich mit einem Problem zum Wasserverbrauch in Bochum gewinnen. Auch drei Probleme bieten nicht für jede Schülerin in einem Kurs mit 25 Schülerinnen die ideale Motivierung, aber die Wahrscheinlichkeit ist bei drei unterschiedliche Bereiche behandelnden Problemen weitaus größer.[94] Und es geht hier erst einmal „nur“ um Motivierung, die Motivation stellt sich durch die Beschäftigung mit der Sache ein, die dann auch auf die anderen Probleme erweiterbar ist. Für den Bearbeitungsprozess bedeutet dies natürlich, dass jede Problemstellung am Beginn des Forschungsprozesses stehen kann.

---

[94] Ich denke sogar, dass, losgelöst von der Integralrechnung, bei hinreichend komplexen Themenbereichen *eine* Problemstellung niemals ausreicht, das ganze Gebiet vollständig zu umfassen und alle Schülerinnen zum Handeln zu motivieren.

Insofern erfüllen die drei Probleme als auch das Konglomerat aller drei die notwendigen Kriterien für ein Intentionales Problem zur Integralrechnung. Weitere Kriterien werden in den Einzelbetrachtungen diskutiert.

In ihrer Funktion als Problembereiche erfüllen alle Intentionalen Probleme die Kriterien der Merkmale K1 – K5 konstruktivistischer Lernumgebungen. Hinsichtlich des Grades an Komplexität, Authentizität oder Strukturiertheit unterscheiden sie sich. Darauf wird im nächsten Abschnitt im Einzelnen eingegangen.

8.2.2 Intentionales Problem 1: Wasserverbrauch in Bochum

Merkmale der Problemstellungen. Diese Problemstellung steht am Anfang, da sie hinsichtlich ihres Komplexitätsgrades die einfachste ist. Es ist zwar nicht obligat, dass die Schülerinnen mit dieser Problemstellung beginnen, doch ist anzunehmen, dass die Schülerinnen auf Grund ihrer bisherigen Unterrichtserfahrungen die erste Aufgabe als die leichtfasslichste unterstellen. Um sie nicht zu entmutigen bzw. die Mutigen bei Auswahl einer komplexeren Aufgabe in ihrer Erwartungshaltung zu bestätigen, habe ich mich für eine dem Schwierigkeits- und damit auch dem Komplexitätsgrad gemäße Anordnung entschieden. Dennoch ist es auch denkbar, dass das Problem von den Schülerinnen nicht als einfach empfunden wird. Es fehlt nämlich jeder Hinweis auf eine eindeutige Fragestellung. Diese muss erst gefunden und formuliert werden. Der Übersetzungsprozess in die eigene Kernidee liefert üblicherweise diese Fragestellungen, doch auch das sind die Schülerinnen nicht gewohnt, was mich dazu bewogen hat, die absolute Loslösung von jeglicher orientierenden Problemstellung erst einmal bei einfacheren Intentionalen Problemen durchzuführen.

Der Problembereich ist durch den Bezug zur Stadt Bochum für zwei Lerngruppen in das Umfeld der Schülerinnen eingebunden.[95] Es wird der lebens- und berufsnahe Bereich der Wassergewinnung, Wasserverwertung und Wasserverteilung behandelt.[96] Damit ist es möglich, die eigenen Vorerfahrungen zu aktivieren und das Problem umgangssprachlich anzugehen.

„Der Wasserverbrauch" als Kernidee. Eine Problemstellung soll die Interessen der Lehrerin widerspiegeln und in der Auseinandersetzung mit der Sache entstehen. So hat sich die Ausgestaltung dieser Problemstellung sowie der anderen Intentionalen Probleme an für mich interessanten Fragestellungen orientiert, die zugleich reichhaltige Interpretationsanlässe für die Schülerinnen bieten. Nach Eingrenzung des jeweiligen lebensnahen Bezuges und der Erstellung der Materialien standen für mich die nachfolgenden Fragen im Zentrum des Interesses, die natürlich keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit erheben: Was geschieht in Bochumer Haushalten um $13^{\underline{00}}$ Uhr? Was ist negativer Wasserverbrauch? Was bedeutet, dass die Anlage *optimal* ausgenutzt ist? Verbrauchen die Bochumerinnen mehr Wasser als sie bekommen? Was beschreibt der Datenpunkt an der Stelle $7^{\underline{00}}$ Uhr: den Wasserverbrauch um $7^{\underline{00}}$ Uhr oder den Durchschnittswert zwischen $6^{\underline{00}}$ und $7^{\underline{00}}$ Uhr? Wie will man auf Grund eines Tages eine Prognose für den nächsten Tag oder sogar für die nächste Woche treffen können? Welchen Sinn macht es überhaupt, Prognosen zu stellen? Ist die produzierte Wassermenge ausreichend, um die ganze Bevölkerung Bochums mit Wasser zu versorgen? Diese und andere Fragen eignen sich hervorragend, den Aufbau einer Problemstellung aus Sicht der Schülerinnen zu motivieren. Es sind Fragen, die von Schülerinnen

[95] Die Lehrerinnen der anderen Lerngruppen hatten die Möglichkeit durch Abänderung der Stadtbezeichnung das Problem ebenfalls lokal anzubinden, was jedoch nicht genutzt wurde.

[96] Für die Schülerinnen mit Zugang zu der Mathewerkstatt (vgl. Hußmann 2000) bestand die Möglichkeit, weitere Informationen bei den Stadtwerken einzuholen.

aus der Vorschauperspektive gestellt werden und für die Lehrerin in der Rückschauperspektive auf Aspekte des regulären Wissens der Integralrechnung hinweisen.

Zugänge, Aspekte und Grundvorstelllungen zum Integralbegriff. In diesem Abschnitt sollen mögliche Zugänge zur Integralrechnung und Bearbeitungsprozesse erörtert werden, die diese Problemstellung ermöglicht. Es soll deutlich werden, dass verschiedene Begriffsentwicklungen denkbar sind, die aber nicht alle durchgeführt werden sollen und in verschiedenen Schülerinnengruppen unterschiedlich ausgebildet werden können. Auch die von mir beschriebene Reihenfolge soll nur *einen* möglichen Weg beschreiben.

Die Schülerinnen erhalten eine Tabelle und deren graphische Veranschaulichung von 25 Werten zum stündlichen Wasserverbrauch. Die erste Schwierigkeit, die sie vermutlich zu bewältigen haben, ist die Interpretation der Bedeutung von negativem Wasserverbrauch. In Hinblick auf die übliche Vorstellung von negativen Integralen als die Maßzahl von Flächen unterhalb der x-Achse, können die Schülerinnen diesem Begriff eine Bedeutung zuweisen, die mit ihrer Erfahrungswelt verknüpft und unabhängig vom Flächeninhaltsaspekt ist. Im Anschluss daran müssen sie die Datenpunkte interpretieren. Die Werte als Bilanz von Zulauf und Verbrauch zu interpretieren kann ein weiteres geistiges Hindernis darstellen. Alsdann bieten sich Interpretationen als stündliche Mittelwerte und als momentan gemessene Werte an, wobei der Text zur Problemstellung eigentlich die zweite Interpretation vorgibt. Hier wird sich zeigen, wie stark Schülerinnen Informationen des Aufgabentextes selektieren und interpretieren[97]. Die erste Setzung führt zur arithmetischen Mittelwertbildung, mit der sich der mittlere stündliche Wasserverbrauch am 01.01.2000 berechnen lässt. Auf Grund dieses Wertes können die Schülerinnen eine Aussage treffen, wie weit das Wasserwerk von der optimalen Nutzung, definiert als Ausgleich zwischen negativem und positivem Gesamtverbrauch, entfernt ist. Dieses Vorgehen entspricht einer Bestimmung des Gesamteffekts W durch Kumulation der Produkte aus Zeitintervall Δt von jeweils einer Stunde und den Werten des jeweiligen Wasserverbrauchs $w(t_i), i = 1, \ldots, 24$. Auf Grundlage der zweiten Setzung müssen die Schülerinnen den Verlauf zwischen den einzelnen Datenpunkten bestimmen. Als Modell bietet sich eine Verbindung der Punkte durch auf diesen Intervallen definierte lineare Funktionen an. Mittelt man dann die Randpunkte jedes Intervalls, kann man wiederum durch arithmetische Mittelwertbildung dieser Werte den Wasserverbrauch bestimmen. Nach KROLL & VAUPEL (1989) führt dies zu der Möglichkeit, den „Mittelwert einer Funktion in einem Intervall“ zu problematisieren (TIETZE et. al 2000). Es lässt sich aber auch allgemeiner als „Approximation von Funktionen“ diskutieren, was hinsichtlich der hier gestellten Zielrichtung dem Grundgedanken des Regelintegrals entspricht. Andererseits führen beide Verfahren zum Flächeninhaltsaspekt. Beim ersten lässt sich das gesamte Wasservolumen mit der Maßzahl der Summe von 25 Rechteckflächen gleichsetzen, während im zweiten Verfahren die Rechtecke durch Trapeze ersetzt werden.

Modellieren die Schülerinnen jedoch die Intervallabschnitte mit Graphen beliebiger Funktionen, so lässt sich auf dem Approximationsaspekt der Begriff der Regelfunktion und auf dem Flächeninhaltsaspekt die anderen Integralbegriffe entwickeln, wobei aus oben genannten Gründen das Cauchy-Integral das naheliegendste ist.

Funktion des Computers. Der Computer muss zur erfolgreichen Lösung der Aufgabe, die Abweichung von der optimalen Nutzung zu bestimmen, nicht benutzt werden, da die Zeitersparnis, die man durch das manuelle Multiplizieren und Addieren der gegebenen Werte erhält, vernachlässigt werden kann. Vertiefen die Schülerinnen jedoch den Approxi-

[97] Schülerinnen, die ihre Konzentration stärker auf die Grafik richten, werden vermutlich die Datenpunkte als stündliche Mittelwerte interpretieren.

mationsgedanken, so wird der Computer zu einem nützlichen Werkzeug. Eine Verfeinerung der Unterteilung des Zeitabschnitts bei Approximation durch beliebige Funktionen würde die benötigte Rechenzeit sehr schnell hochtreiben und den Lösungsprozess erschweren.

8.2.3 Intentionales Problem 2: Der Fahrtenschreiber

Merkmale der Problemstellungen. Die Problemstellung des Fahrtenschreibers ist von der Klarheit und der Verständlichkeit der Aufgabenstellung einfacher als die erste. Hinsichtlich ihres Schwierigkeitsgrades und des Bearbeitungsaufwands ist sie jedoch anspruchsvoller. Zur Lösung wird ein Verständnis für die Zusammenhänge zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Wegstrecke benötigt. Die möglichst genaue Berechnung der gefahrenen Strecke erfordert umfangreiche Rechnungen, die am Sinnvollsten in Arbeitsteilung durchgeführt werden. Aus der Bearbeitung können neue Probleme erwachsen, zu deren Lösung die Schülerin Zusatzinformationen benötigt, wie zum Beispiel das Wissen über die zulässigen Höchstgeschwindigkeiten von Lastkraftwagen. Hieran wird die Einbindung des Problems in lebens- und berufsnahe Bereiche deutlich. Über die Authentizität lässt sich sicher streiten, sowohl hinsichtlich der Verwendung von Fahrtenschreibern als auch hinsichtlich des beschriebenen Falles.[98] Trotz dieser Einwände halte ich diese Problemstellung im Sinne der Kriterien für Probleme innerhalb konstruktivistischer Lernumgebungen für geeignet. Zudem handelt es sich um einen Problembereich, der besonders die Mädchen ansprechen kann (vgl. BARNES, 1994).

„Der Fahrtenschreiber“ als Kernidee. Dieses Problem ist aufgemacht wie ein kleiner Detektivfall und spiegelt damit eine Perspektive auf Mathematik wider, die dadurch geprägt ist, Mathematik als eine Disziplin zu begreifen, in der interessante und knifflige Probleme gelöst werden. Dies ist eine Sichtweise, die der Mathematik ihre Nützlichkeit hinsichtlich realer Probleme nicht nimmt, sie aber durch einen spielerischen Aspekt ergänzt.

Besonders interessante Aspekte an dieser Problemstellung und damit auch wiederum Interpretations- und Diskussionsanlässe für die Schülerinnen auf dem Weg von der Kernidee der Lehrerin zur Kernidee der Schülerin sind die nachfolgenden Fragen: Wie lässt sich die zurückgelegte Strecke möglichst genau bestimmen? Wie groß ist die Differenz der auf dem Tacho angezeigten Strecke und der laut Tachoscheibe zurückgelegten Strecke? Hat Frau Grat die Geschwindigkeitsbegrenzungen übertreten? Wie ist der Geschwindigkeitsverlauf in der nicht auf der Tachoscheibe gemessenen Zeit? Wie schnell ist Frau Grat im für sie besten Fall gefahren? Wie viel Strafgebühr kostet sie diese Geschwindigkeitsübertretung?

Wie schon bei der ersten Problemstellung wird an diesen Fragen wieder das Spannungsfeld von Vorschau und Rückschau sichtbar, in der ich mich bei Entwicklung der Problemstellung befunden habe und die Schülerinnen sich zur jeder Zeit ihres Forschungsprozesses befinden, wobei ihr Standort sich fortwährend der Rückschauperspektive nähert.

Zugänge, Aspekte und Grundvorstelllungen zum Integralbegriff. Analog zur Diskussion des Problems zum Wasserverbrauch erörtere ich in diesem Abschnitt den Gehalt dieser Kernidee hinsichtlich der Begriffsbildung.

Wie oben schon ausgeführt besteht eine grundsätzliche Voraussetzung für den Zugang zu diesem Problem in der Kenntnis des Zusammenhangs $s(t) = v(t) \cdot t$. Auf Grund der im All-

[98] Die Benutzung von Fahrtenschreibern ist ohne Zweifel authentisch, von der Tachoscheibe lässt sich jedoch normalerweise die zurückgelegte Wegstrecke ablesen. Zudem werden seit dem 01.06.2000 digitale Fahrtenschreiber verwendet.

täglichen zahlreichen Berührungspunkte mit Geschwindigkeitsangaben dürfte dies den Schülerinnen, wenigstens umgangssprachlich, keine Probleme bereiten. Die zurückgelegte Strecke kann sodann mit Hilfe einer sinnvollen Unterteilung der Zeitachse gewonnen werden. Hierzu werden zu augenfälligen Abschnitten die Durchschnittsgeschwindigkeiten abgelesen und jeweils mit der Länge des jeweiligen Zeitabschnittes multipliziert. In der Zeit zwischen $5^{\underline{30}}$ Uhr und $6^{\underline{00}}$ Uhr könnte z.B. eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 $^{km}/_{h}$ angenommen werden (vgl. Abbildung 8.2). In Abschnitten, in denen die Geschwindigkeiten stark schwanken, bietet sich zur exakteren Bestimmung eine feinere Unterteilung an. Dieses Vorgehen hat zwei Vorteile: der Approximationsaspekt tritt deutlich zu Tage, da eine hinreichende Annäherung an den Funktionsgraphen Zielperspektive der Schülerinnen ist, und in Abgrenzung zur ersten Kernidee zeigt sich eine nicht äquidistante Zerlegung des Intervalls für die Problembearbeitung nützlicher als eine äquidistante. Alternativ zur Approximation durch Mittelwertbildung lässt sich die Funktion auch auf der gewählten Zerlegung durch Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten annähern. Dies macht insofern Sinn, da man auf Grund von offenkundig ungenauem Datenmaterial sowohl zu Gunsten als auch zu Ungunsten von Frau Grat argumentieren kann. So erhält man ein Intervall, in dem die tatsächlich zurückgelegte Wegstrecke enthalten sein muss. Und erst bei Übereinstimmung von Maximal- und Minimalwert, in diesem Fall natürlich nur theoretisch, erhält man die faktisch gefahrene Strecke. Darüber hinaus lässt sich die Geschwindigkeitskurve auch durch auf den jeweiligen Abschnitten konstante Geschwindigkeiten annähern, indem man diese so wählt, dass sie einen möglichst geringen Unterschied zur tatsächlich gefahrenen Geschwindigkeit aufweisen. Diese Methode ist insofern förderlich, als dass sie die Unsicherheit geschätzter Durchschnittsgeschwindigkeiten durch die Eindeutigkeit der am geringsten abweichenden Geschwindigkeit ersetzt. An dieser Stelle wird schon deutlich, wie viel unterschiedliche Aspekte und mögliche Integralbegriffe bisher in die Bearbeitung eingehen. Neben den die Begriffsbildung dominierenden Approximations- und Mittelwertaspekt ist die Kumulation mit der Zielrichtung, den Gesamteffekt zu bestimmen, wichtiges Werkzeug. Auf Grund der verschiedenen Approximationsverfahren können sowohl Cauchy, Riemann- als auch Regelintegral vorbereitet werden. Mit einer im Approximationsprozess notwendig wachsenden Anzahl von Zerlegungsabschnitten tritt im weiteren Verlauf der Mittelwertaspekt zu Gunsten des Kumulationsaspektes in den Hintergrund.

Je nachdem, wie genau die jeweilige Schülerin die Wegstrecke bestimmen will, reicht der bis hierher dargelegte Gedankengang zur Lösung der Fragestellung aus. Die Notwendigkeit, die Streckenlänge als Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen zu begreifen, besteht somit nicht. Der Kumulationsaspekt in Verbindung mit einer anwendungsbezogenen Aufgabe bewirkt folglich, „dass einer frühzeitigen und zu starken Fixierung des Integralbegriffs mit dem Flächeninhalt vorgebeugt wird" (TIETZE et al., 2000, S. 281).

Zu Beginn dieses Abschnitts habe ich darauf hingewiesen, dass die drei Intentionalen Probleme als Ganzes betrachtet mehr als die Summe ihrer Teile sind. Dies zeigt sich an dieser Problemstellung deutlich. Einige Schülerinnen wissen auf Grund von Vorerfahrungen, dass die Geschwindigkeit die Änderungsrate der Strecke bezüglich der Zeit ist und mit der ersten Ableitung bestimmt werden kann. Dieser Gedanke hilft zur Bearbeitung *dieses* Problems nicht. Verknüpft man ihn jedoch mit einem Problem, in dem ein Funktionsterm explizit gegeben ist, wie es bei der Problemstellung zum Geschlechterwachstum der Fall ist, so kann er dort den Lösungsprozess vorantreiben.

Funktion des Computers. Da bei diesem Problem weder konkrete Funktionsterme, noch eine äquidistante Zerlegung der x-Achse sinnvoll erscheinen, ergibt sich außer der Multiplikation des jeweiligen Zeitabschnitts mit der entsprechenden Geschwindigkeit keine Möglichkeit, den Computer gewinnbringend einzusetzen.

8.2.4 Intentionales Problem 3: Geschlechterwachstum

Merkmale der Problemstellungen. Diese Problemstellung ist sicher die schwierigste und die komplexeste Problemstellung und steht deswegen am Ende der Reihe. Sie lässt sich sowohl mit Hilfe der Funktionsterme, als auch allein auf Grundlage der Funktionsgraphen erschließen, was in direkter Nachfolge zu den ersten beiden Intentionalen Probleme stände. Dies ist der Grund, warum die Funktionsterme zu Anfang noch nicht zur Verfügung gestellt werden. Erst auf Nachfrage durch die Schülerinnen werden die Funktionsterme dargelegt. Die das Geschlechterwachstum modellierenden Funktionen orientieren sich an Zahlen, die in einer Studie in den siebziger Jahren erhoben wurden (vgl. WACKER, 1986). Wie WACKER ausführt, ist es nicht möglich, das Wachstum nach Gesetzmäßigkeiten zu modellieren, um so langfristig zuverlässige Aussagen treffen zu können. Ziel meiner Interpolation ist somit auch nicht, die Daten perfekt zu approximieren, sondern die Daten durch Funktionen zu modellieren, die eine anspruchsvolle Problembearbeitung gestatten. Die Authentizität der Daten ist in meinen Augen dennoch gewährleistet. Ebenso verhindert die Frage nach einem Größenvergleich (vgl. Abschnitt 8.1.3) nicht eine offene Problembearbeitung. Denn neben verschiedenen Lösungsmöglichkeiten dieses Problems eröffnet die Frage über den Informationsgehalt der Grafik weitere Fragestellungen. Ein Verzicht auf diese Frage würde aber unter Umständen, d.h. sollten die Schülerinnen diese Frage nicht selbst stellen, ein Verlust von essentiellen Bestandteilen des intendierten Gehalts bedeuten. Eine nachträgliche Ergänzung der Fragestellung durch die Lehrperson wäre in meinen Augen eine zu starke Lenkung und würde die den Schülerinnen zugestandene Freiheit im Bearbeitungsprozess ad absurdum führen.

„Das Geschlechterwachstum“ als Kernidee. Aus meiner Perspektive ist dieses Problem das interessanteste von den dreien. Es umfasst die Kernpunkte der Integralrechnung am Wirksamsten und beinhaltet reichhaltige Hindernisse, die, sind sie erst einmal bewältigt, zu grundlegenden Erkenntnissen führen können. Besondere Bedeutung kommt auch in diesem Zusammenhang der expliziten Frage nach einem Größenvergleich zu. Ich bin der Meinung, dass diese Problemstellung ohne diese Frage ihre Orientierungsfunktion verliert. Es besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen mit Hilfe der Differentialrechnung die Extremstellen des Wachstums bestimmen, für Jungen und Mädchen miteinander vergleichen und dann keinen Grund mehr sehen, das Problem tiefergehend zu studieren. Die Aufforderung, die Körpergrößen zu vergleichen, legt dagegen viele weitere Problembereiche offen: Was hat Wachstum mit Größe zu tun? Gibt es „Wachstumssprünge“? Wie wirken sich solche „Wachstumssprünge“ auf die Entwicklung der Größe aus? Wie groß sind Jungen und Mädchen bei Geburt?

Zugänge, Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff. Im Folgenden beschäftige ich mich ausschließlich mit dem Größenvergleich von Mädchen und Jungen, da ich denke, dass mit Beantwortung dieser Frage alle wesentlichen Gesichtspunkte dieses Problems analysiert werden.

Da die Integralrechnung unmittelbar an die Differentialrechnung anschließt, ist anzunehmen, dass die Schülerinnen versuchen werden, die Problemstellung mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung zu lösen. Erst wenn sie erkennen, dass dieser Lösungsweg sie nicht zum Ziel führt, werden sie versuchen andere Methoden zu entwickeln.

Sollten die beiden anderen Intentionalen Probleme zuvor behandelt worden sein, bietet sich den Schülerinnen eine vergleichbare Herangehensweise an, d.h. die Graphen werden mit den entsprechenden Verfahren approximiert. Dies ist sowohl mit als auch ohne Funktionstermen möglich. Äußern die Schülerinnen nicht den Wunsch nach diesen, bietet sich an, sie erst einmal ihre Überlegungen ausschließlich auf Basis der Graphen durchführen zu lassen. Dieses Verfahren ist vergleichbar mit der zur Lösung der zweiten Problemstellung verwendeten Methode. Es zeigt aber deutliche Schwächen, wenn es um die Berechnung des Schnittpunktes der Körperhöhenkurve geht. Dieser lässt sich ohne aufwendige Rechnungen nur sehr ungenau bestimmen, so dass eine Forderung nach Funktionstermen notwendig erscheint. Mit Hilfe dieser Terme lässt sich die Genauigkeit des Verfahrens verbessern und ein Algorithmus zur Berechnung der Körperhöhe mit beliebiger Genauigkeit entwickeln. Darauf aufbauend lässt sich sowohl ohne als auch mit Flächeninhaltsaspekt der Grenzwert der Produktsummen bilden. Hierbei ist es irrelevant, ob den Berechnungen Grundgedanken des Regel-, Riemann- oder Cauchy-Integrals zu Grunde liegen, da auf den Teilintervallen stetige Funktionen modelliert werden und die Integralbegriffe somit zu denselben Ergebnissen führen.[99] Die Zielsetzung, eine geeignete Berechnungsmethode zu finden, favorisiert jedoch das Cauchy-Integral, da die Bestimmung der Linkssummen sich am Einfachsten programmieren lässt und infolgedessen am Schnellsten zum Ziel führt. In jedem Fall entwickeln die Schülerinnen an dieser Stelle das erste Mal einen singulären Integralbegriff.

Alternativ zu diesem Vorgehen ist denkbar, dass die Schülerinnen mit der Bearbeitung *dieser* Problemstellung beginnen. Auf Grund von Vorerfahrungen aus dem Mathematikunterricht ist es wahrscheinlich, dass die Schülerinnen sehr schnell nach Funktionstermen verlangen. Da vielen Schülerinnen bekannt sein dürfte, dass das Körperwachstum die Änderungsrate der Körperhöhe ist und diese mit Hilfe der Ableitung bestimmt wird, ist es vorstellbar, dass sie versuchen werden, die Stammfunktion zu den betreffenden Funktionen zu bestimmen. Aus diesem Grund sind die ersten Funktionsterme solche, die den Schülerinnen die Bestimmung einer Stammfunktion gestatten. Da das Thema der Unterrichtsreihe als „Einführung in die Integralrechnung“ ausgewiesen ist und eine Operation von DERIVE mit dem Namen INTEGRAL existiert, können die Schülerinnen auf Basis ihrer Vermutung zum Zusammenhang, „Integrieren = Umgekehrtes Differenzieren“, diese Operation testen und als Werkzeug benutzen. Aber auch bei Vernachlässigung dieser Operation lassen sich die ersten Stammfunktionen manuell bestimmen und mit Hilfe des Computers visualisieren. Die Interpretation der Grafik offenbart den Schülerinnen allerdings, dass die Graphen der Stammfunktionen an den Verknüpfungsstellen nicht stetig sind.[100] Das liegt in der Uneindeutigkeit der Stammfunktion begründet. Der Computer bestimmt nur *die* Stammfunktion, die durch den Ursprung verläuft. So treffen die Schülerinnen kurz nacheinander auf zwei große geistige Hindernisse, deren Überwindung jedoch einen ebenso großen Erkenntnisgewinn verspricht. So können die Schülerinnen neben dem Stammfunktionsaspekt und der Uneindeutigkeit der Stammfunktion auch den Hauptsatz der Integralrechnung und die Integralfunktion entwickeln. Eine mögliche Lösung des Problems ist allerdings noch nicht gefunden. Zwar kann der Schnittpunkt von Jungen- und Mädchenkurve am Computermonitor abgelesen werden, doch ist dies vermutlich eine unbefriedigende Lösung. Rechnerisch hingegen lässt sich der Schnittpunkt über den Stammfunktionsaspekt leider nicht so einfach bestimmen, da die Stammfunktion der zweiten Jungenfunktion sich nicht explizit darstellen lässt. An dieser Stelle muss ein weiteres Integrationsverfahren und ein wei-

[99] Dies unterstreicht noch einmal die Bedeutung von Kumulation und Gesamteffekt.

[100] Die Wachstumsfunktionen sind ebenfalls nicht stetig. Dies fällt aber bei der gegebenen Skalierung nicht auf und soll auch erst zu einem späteren Zeitpunkt problematisiert werden.

terer Integrationsaspekt entwickelt werden, welche unter Zuhilfenahme der Lösungsverfahren der anderen beiden Intentionalen Probleme gewonnen werden können. Gleichzeitig kann die für Anwendungen wichtige Funktion e^{-x^2} diskutiert werden.

Aber auch ohne Rückgriff auf die anderen beiden Intentionalen Probleme können die Schülerinnen den für diesen Aufgabenteil notwendigen Kumulationsaspekt bilden. Durch Spezifizierung auf ihnen bekannte einfache Funktionsterme können sie selbsttätig den entsprechenden Integralbegriff entwickeln und diesen sodann hinsichtlich verschiedener Funktionenklassen generalisieren. Folglich ist es denkbar, dass die in Schulbüchern vorgenommene Sequenzierung des Unterrichtsstoffes von einfachen zu immer schwieriger werdenden Inhalten von den Schülerinnen selbst durchgeführt wird.

Funktion des Computers. Dieses Problem ist ohne Computereinsatz nicht zufriedenstellend und in angemessener Zeit lösbar. Da ich im vorhergehenden Abschnitt zentrale Aspekte des Computereinsatzes schon erörtert habe, fasse ich hier nur die wichtigsten Ergebnisse zusammen. Der Computer ermöglicht den Umgang mit realitätsnahem und komplexem Datenmaterial. Das Modul „Integral berechnen“ schafft der Schülerin Freiraum, sich auf die Zusammenhänge von Funktion und Stammfunktion zu konzentrieren. Die Visualisierung der Stammfunktionengraphen weist sie auf die Schwierigkeit der nicht eindeutigen Stammfunktion hin. Mit Hilfe der Window-Shuttle-Technik ist es ihr möglich die Funktionsterme zu modellieren und zugleich die Auswirkungen auf den Graphen zu beobachten. Sie kann die unterschiedlichen Produktsummen berechnen und deren Konvergenzgeschwindigkeit untersuchen. Der Grenzwert der Produktsummen lässt sich wiederum als Modul programmieren und auf die Funktionen, deren Stammfunktion nicht explizit darstellbar sind, anwenden, aber auch andere Funktionenklassen können systematisch untersucht werden.

TEIL 3

Die empirische Auswertung von KLIP

Kapitel IX

9 Das Untersuchungsdesign

In diesem dritten Teil soll die empirische Auswertung des in Teil 1 dargestellten theoretischen Konzeptes in Anwendung auf den in Teil 2 beschriebenen konkreten Unterrichtsversuch dargestellt werden. Dazu werden im ersten Abschnitt die in den ersten beiden Teilen generierten Forschungsfragen noch einmal im Überblick dargestellt. Im Anschluss werden die Charakteristika der Forschungsmethoden und deren Bezug zu den Forschungsfragen erläutert.

9.1 Forschungsfragen

Zentrale Fragen dieser Untersuchung sind:

(1) Ist Begriffsbildung in einem konstruktivistisch orientierten Unterrichtskonzept, wie es KLIP darstellt, derart möglich, dass sie den Anforderungen von Schule genügt? Das bedeutet u.a.: Welche Integralbegriffe und Integralaspekte entwickeln die Schülerinnen eigenständig und konstruktiv und wie sind diese gewichtet?

(2) Ist Begriffsbildung in KLIP primär individuell oder sozial geprägt?

(3) Wie verändert Konstruktivistisches Lernen in Form von KLIP das Interesse und die Freude an der Mathematik?

(4) Welche Auswirkungen hat Konstruktivistisches Lernen in Form des computerorientierten Werkstattunterrichts auf die Bildungsziele des Mathematikunterrichts? Damit ist insbesondere ein Vergleich zwischen der Förderung von Kalkülfertigkeiten und Problemlösefähigkeiten gemeint.

(5) Lassen sich unterschiedliche Verhaltensweisen bei Mädchen und Jungen hinsichtlich der Begriffsentwicklung, der Leistungen, der Forschungshefte, des Werkstattunterrichts und des Computereinsatzes erkennen?

9.2 Forschungsmethoden

Der in dieser Untersuchung verfolgte Theorieansatz zur Auswertung hat explorativen Charakter. Es handelt sich hier um einen innovativen Schulversuch, in dem ein neues didaktisches Modell untersucht werden soll. Es können zwar aufgrund des theoretischen Konzeptes Hypothesen aufgestellt werden, doch es steht zu erwarten, dass einige Hypothesen sich erst anhand der Durchführung des Projekts und durch die Auswertung der Daten ergeben. Zudem ist, aus statistischer Perspektive, die Gesamtpopulation (n=119) zu gering um allgemeingültige Thesen aufzustellen. Darüber hinaus würde das Aufstellen allgemeiner Wahrheiten den theoretischen Ansatz dieser Arbeit ad absurdum führen.

Damit ist die sogenannte Kontextualisierung[101] der entwickelten Theorie zentraler Bestandteil der hier durchgeführten Unterrichtsforschung. Das entwickelte Konzept erhebt damit nur Anspruch auf Repräsentativität im untersuchten Gegenstandsbereich. Eine mögliche Generalisierung drückt sich nicht im „Umfang des Geltungsbereiches aus, sondern in der Art, wie spezifische Ereignisse mit bestimmten Begriffen beschrieben werden" (KRUMMHEUER, 1999, S. 23). Ziel dieser Untersuchung ist die Identifikation von Mechanismen die zur Veränderung von Unterricht beitragen können.

Angestrebte Veränderungen von Mathematikunterricht in diesem Projekt umfassen inhaltlich

(i) die Steigerung des Interesses an Mathematik;
(ii) die Förderung selbstbestimmten, kreativen, eigentätigen und konstruktiven Handelns im Mathematikunterricht;
(iii) die Förderung von Problemlösefähigkeiten, von kommunikativen und argumentativen Fähigkeiten;
(iv) die Förderung des Verständnisses von Mathematik als einer Disziplin, in der kreativ, alltagsnah und erfinderisch gedacht und gehandelt wird.

Eine Generalisierbarkeit und Reproduzierbarkeit aussagekräftiger Ergebnisse dieser Analyse sollten in Nachfolgeuntersuchungen überprüft werden. Darauf wird im Verlauf der Auswertung an geeigneten Stellen verwiesen.

9.2.1 Gegenstand der Analyse

Zur Analyse dieser Fragen stehen Forschungshefte, ein Abschlusstest mit Kontrollkursen, und Fragebögen zu Werkstattunterricht, Computereinsatz, Intentionalen Problemen und Forschungsheften zur Verfügung.

Auf Grundlage der Forschungshefte wird interpretativ die Art und Weise von Begriffsentwicklung, deren Referenz zu den Intentionalen Problemen und der Frage nach sozialen und geschlechtsspezifischen Bedingtheiten von Begriffsbildung nachgegangen. (Forschungsfragen 1, 2 und 5). Diese Untersuchung wird im Kapitel 10 durchgeführt.

Die Analyse des Abschlusstests ermöglicht insbesondere die Beantwortung der Fragen 1 und 4. Auf Grundlage von Problemlöse-, Kalkül- und Verständnisaufgaben können die durch KLIP möglicherweise entwickelten Fähigkeiten und Begriffe mit den üblichen Fähigkeiten und vorhandenen Begriffen, repräsentiert durch zwei Kontrollkurse, miteinander verglichen werden.

Im dritten Teil der Analyse wird ein Fragebogen ausgewertet, der die Zustimmung oder Ablehnung des Konzeptes KLIP in seiner konkreten Ausgestaltung für die Integralrechnung und damit u.a. auch das Interesse an Mathematik bei den Schülerinnen abfragt. Damit werden in Kapitel 12 die Fragen 3 und 5 beantwortet.

9.3 Die teilnehmende Population

Wie in Abschnitt 6.2 dargelegt, haben an KLIP insgesamt vier Kurse teilgenommen. Die Untersuchung konzentriert sich auf die Bearbeitung der drei Intentionalen Probleme und

[101] Vgl. z.B. KRUMMHEUER (1999, S. 22 ff.),TOULMIN (1994).

einer ersten Verallgemeinerung der entwickelten Begriffe hinsichtlich der Generierung einer allgemeinen Theorie. Inhaltlich bedeutet das, dass davon auszugehen ist, dass die Kurse einen oder einige Integralbegriffe, Aspekte und Grundvorstellungen der Integralrechnung, den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und eventuell sogar einige einfache Sätze, wie z.B. die Integral- und Intervalladditivität, heuristisch entwickelt haben.

Die teilnehmenden Lehrpersonen haben ebenso wie die Schülerinnen eine Art Forschungsheft geführt, mit dem Ziel den Unterrichtsverlauf aus ihrer Perspektive zu dokumentieren. Diese Forschungshefte sind für die vorliegende Arbeit nur insofern von Bedeutung, als dass aus ihnen auf Besonderheiten geschlossen werden kann, die für die einzelnen Untersuchungsabschnitte relevant sind. Ansonsten werden die Aufzeichnungen in Nachfolgearbeiten analysiert.

Nachfolgend werden erste wichtige Informationen zu den teilnehmenden Kursen (KLIP-Kurse) kurz skizziert. Detailliertere Informationen werden in den jeweiligen Untersuchungsabschnitten dargestellt.

Der **Kurs LKUC** ist ein gymnasialer Leitungskurs mit acht Mädchen und acht Jungen, die während des Unterrichtsversuchs im Wesentlichen in gleichbleibenden Gruppenkonstellationen zusammengearbeitet haben. Die Mitglieder einer Gruppe mussten sich wegen langfristiger Krankheiten von einigen Schülerinnen häufig in wechselnden Konstellationen zusammenfinden. Die Lerngruppe arbeitete das gesamte Schuljahr nach dem Konzept von KLIP. Das bedeutet, dass nicht nur die oben skizzierten Inhalte, sondern auch alle weiteren Begriffe, Definitionen, Sätze und Beweise selbsttätig und konstruktiv entwickelt wurden. Der Zeitraum von der Einführung der Intentionalen Probleme bis zur Entwicklung der oben aufgeführten Inhalte umfasst ca. fünf Wochen a 5 Unterrichtsstunden. Dabei wurden einige Begriffe von einigen Schülerinnen nicht nur auf heuristischem Niveau erarbeitet. Der Kurs arbeitete vier der fünf Wochenstunden im Computerraum. Zudem nutzten alle Schülerinnen auch zu Hause das CAS DERIVE. Die Aufgabenstellungen wurden den Schülerinnen per Hypermedia zur Kenntnis gebracht.[102]

Der **Kurs LKUO** ist ein Gesamtschul-Leistungskurs mit sieben Mädchen und zwölf Jungen, die ebenfalls die ganze Zeit in stabilen Gruppen arbeiteten. Die Lehrperson hielt sich während der gesamten Zeit nahezu vollständig aus dem Lernprozess heraus. Dieser Kurs hatte als einziger KLIP-Kurs keine Computer zur Verfügung. Deswegen wurde das Problem des Geschlechterwachstums entsprechend modifiziert (vgl. Abschnitt 8). Alle drei Probleme lagen den Schülerinnen in Papierform vor. Die Lerngruppe konnte während dieser Phase keine der Problemstellungen erfolgreich bearbeiten, so dass sie nach ca. fünf Wochen mit jeweils fünf Wochenstunden zur gewohnten Unterrichtsform zurückkehrten. Die Begriffsentwicklung im nachfolgenden Unterricht rekurrierte immer wieder auf die drei Probleme, so dass die Schülerinnen sich im Nachhinein noch intensiv mit den Problemen beschäftigten. Die Gründe für das Scheitern liegen vermutlich im Leistungsniveau des Kurses. So zeigte TIMSS 2 beispielsweise, dass die Leistungsfähigkeit bei Schülerinnen einer Gesamtschule zwischen der von Schülerinnen auf einer Hauptschule und einer Realschule liegt (vgl. BAUMERT & LEHMANN, 1997). Eine andere Ursache für die erfolglose Bearbeitung ist möglicherweise im fehlenden Computereinsatz zu sehen. Aus den Forschungsheften wird zum Teil deutlich, dass das Scheitern an Routineaufgaben zuweilen einen Abbruch der Aufgabenbearbeitung nach sich zog. Dieser Frage wird in den Kapiteln 11 und 12 eingehender nachgegangen.

[102] Vgl. Mathewerkstatt (HUßMANN, 2000).

Der **Kurs GKUC1** ist ein gymnasialer Grundkurs mit fünfzehn Mädchen und acht Jungen. Die Gruppenzusammensetzung war, wie bei den anderen Kursen, stabil. Die Schülerinnen arbeiteten mit dem CAS DERIVE, welches sie aber nicht zu Hause nutzten. Sie hatten jedoch nach der Schule und während der Freistunden die Gelegenheit an Computerplätzen in der Schulbibliothek mit dem Programm zu arbeiten. Diese Möglichkeit wurde nur zum Teil genutzt. Die Probleme lagen dem Kurs in Papierform vor. Der Arbeitszeitraum betrug ungefähr fünf Wochen mit jeweils drei Wochenstunden. Die Schülerinnen bearbeiteten die Probleme sehr unterschiedlich. Während einige Schülerinnen die Probleme nur mit Hilfe endlicher Produktsummen einer ungenauen Lösung zuführten, lagen bei anderen Schülerinnen zentrale Integralaspekte schon vor. Mit deren Hilfe die ersten zur Lösung der Probleme tragfähigen Begriffe entwickelt wurden. Die meisten Schülerinnen schränkten ihr Blickfeld so auf die Probleme ein, dass nur in einem beschränkten Maß Verallgemeinerungen entwickelt wurden. Auch wenn in diesem Kurs die Lehrperson sich weitgehend zurückhielt, war sie für Probleme der Schülerinnen ansprechbar. Das Verhalten der Schülerinnen in diesem Kurs deutet daraufhin, dass die Motivierung durch die Probleme nicht hinreichend gegeben war. Darauf wird in Kapitel 12 noch weiter eingegangen.

Der **Kurs GKUC2** ist ebenfalls ein gymnasialer Grundkurs mit zwölf Mädchen und sieben Jungen. Die Gruppenarbeit fand ebenfalls in festen Gruppenzusammensetzungen statt. Die Schülerinnen nutzten den TI92, der ihnen auch zu Hause zur Verfügung stand. Die Aufgabenstellungen lagen den Schülerinnen in Papierform vor. Der Gruppenarbeit wurde des öfteren durch Präsentationsphasen im Sinne von KLIP (vgl. Abschnitt 1.3) unterbrochen. Insgesamt arbeiteten die Schülerinnen über einen Zeitraum von ungefähr fünf Wochen mit jeweils drei Wochenstunden an den Problemen bis sie die oben definierten inhaltlichen Anforderungen zum großen Teil erfüllt hatten. Anschließend wurden die Begriffe der Integralrechnung in der gewohnten Lernumgebung weiter ausgearbeitet. Dabei sieht die gewohnte Lernumgebung immer wieder Phasen in Gruppen- oder Partnerinnenarbeit vor.

KAPITEL X

10 Die Auswertung der Forschungshefte

In allen an KLIP beteiligten Kursen wurden Forschungshefte gemäß des in Abschnitt 2.3 dargestellten Konzeptes geführt. Alle Forschungshefte wurden transkribiert und kodiert.[103]

Hinsichtlich des in Teil 1 formulierten theoretischen Konzeptes sollen in dieser Arbeit die folgenden Fragen näher untersucht werden (vgl. die Forschungsfragen in Kapitel 9):

(1) Ist Begriffsbildung in der vorliegenden Konzeption primär individuell oder sozial geprägt?

(2) Ist Begriffsbildung in einem konstruktivistisch orientierten Unterrichtskonzept, wie es KLIP darstellt, derart möglich, dass sie den Anforderungen von Schule genügt?

Der Frage nach der Art der Wissenskonstruktion (1) wird in dieser Arbeit nur zum Teil nachgegangen, da eine der zentralen Fragestellungen dieser Untersuchung (2) einen Schritt davor ansetzt: Ist konstruktivistische Begriffsbildung *überhaupt* möglich, so dass sie den von der Gesellschaft formulierten Anforderungen genügt? Zur Beantwortung dieser Frage sind die Ergebnisse der Vergleichsuntersuchung in Kapitel 12 ebenfalls zu berücksichtigen.

Um dennoch auch in dieser Anfangsuntersuchung einen Eindruck über den Prozess und die Inhalte der Begriffsbildung zu gewinnen, wurden die Forschungshefte der Schülerinnen und Schüler[104] ausgewertet. Die Auswertung konzentriert sich dabei auf zwei Aspekte:

(1a) Sind Ähnlichkeiten zwischen den in den einzelnen Forschungsheften dokumentierten Begriffsbildungen zu erkennen?

(2a) Sind Schülerinnen und Schüler in der Lage, selbsttätig und eigenverantwortlich, allein auf Grundlage von Intentionalen Problemen, zentrale Ideen der Integralrechnung zu entwickeln?

Die erste Frage (1a) wird mit Hilfe einer Clusteranalyse unter Berücksichtigung aller Schüler und Schülerinnen beantwortet und soll einen Hinweis auf die Art der Wissenskonstruktion geben. Obwohl die Beantwortung dieser Frage die Beantwortung der zweiten Frage (2a) voraussetzt, wird sie zuerst diskutiert. Das hängt damit zusammen, dass ein Vorhandensein sozialer Wissenskonstruktionen die Analyse von Begriffsbildungsprozessen methodisch erleichtert.

[103] Vgl. dazu Abschnitt 10.1 und die Kodierungstabelle in Anhang A. Abschnitt 14.1.

[104] Da, wie oben schon erwähnt, in den nächsten Kapiteln immer wieder geschlechtsspezifische Fragestellungen diskutiert werden, werden von nun an weibliche und männliche Formen getrennt aufgeführt.

Die zweite Frage (2a) wird deskriptiv und exemplarisch auf Grundlage der Forschungshefte beantwortet. Dazu werden Auszüge aus den Forschungsheften hinsichtlich der Aspekte und Begriffe der Integralrechnung und der Bearbeitung der Intentionalen Probleme ausgewertet. Die Analysemethode wird in Abschnitt 10.2 vorgestellt.

Beide Untersuchungen folgen den Methoden qualitativer Unterrichtsforschung.[105] Die Kodierung und die Interpretation der Ausschnitte aus den Forschungsheften erfolgte extensiv, d.h. in Gruppen von zwei bis vier Personen werden mit Blick auf die Forschungsfragen Sinnabschnitte in den Forschungsheften ausgewählt, codiert und Abschnitt für Abschnitt interpretiert. Dasselbe Verfahren wird für die Ergebnisse der Clusteranalyse durchgeführt.

10.1 Ähnlichkeitsuntersuchung der Forschungshefte im LKUC[106]

Alle Forschungshefte wurden mit Hilfe des Programms WinMAX pro 2000 transkribiert und codiert. Ein Auszug aus dem Transkript samt Kodierung ist in Abbildung 10.3 zu sehen. Eine Erläuterung zur Methode der Transkription ist in Abschnitt 10.2 nachzulesen.

Die nachfolgende Untersuchung ist auf den Kurs LKUC beschränkt. Der Grund hierfür hängt mit der Fragestellung (1) zusammen. Es soll untersucht werden, ob soziale Phänomene den Prozess der Begriffsbildung beeinflussen. Die sozialen Phänomene hängen jedoch von den Einzelpersonen, den Arbeitsgruppen und dem Kursverband ab. Wechselwirkungen zwischen den Kursen der einzelnen Schulen können ausgeschlossen werden. Infolgedessen bietet sich eine Untersuchung der Schülerinnen und Schüler, getrennt nach Kursverbänden, an. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, werden die Forschungshefte des Kurses LKUC exemplarisch analysiert.

Die Liste aller Kodierungsworte ist im Anhang A in Abbildung 14.1 dokumentiert. Auf Grundlage der Kodierungsworte zu Begriffsbildung, das sind alle Kodierungsworte, die unter dem Oberbegriff Integralbegriffe in Abbildung 14.1 subsummiert sind, wurde ein Verlaufsvektor $v_i \in \{0,1\}^m, i = 1,2,\ldots,16$, für jedes Forschungsheft der sechszehn Probandinnen und Probanden erstellt, der m zentrale Aspekte enthält, die den Prozess der im Forschungsheft dokumentierten Begriffsbildung wiedergeben. Liegt $k \in \{1,\ldots,m\} =: M$ vor, wird im Vektor v_i an der k-ten Stelle v_i^k der Wert 1 eingetragen, ansonsten 0.[107] Zur Analyse von Gruppen, die ähnliche Forschungshefte erstellt haben, wird die Clusteranalyse mit dem Ähnlichkeitsmaß Jaccard-I-Maß und dem Complete-Linkage-Verfahren durchgeführt.[108] Das Jaccard-I-Maß ist ein für die Untersuchung adäquates Maß. Es misst den relativen Anteil gemeinsamer Eigenschaften zweier Objekte bezogen auf die Variablen, so dass mindestens eines der Objekte die betreffende Eigenschaft aufweist. Das ist insofern sinnvoll, da nicht alle Forschungshefte dieselben Aspekte enthalten müssen, und das Fehlen eines Aspektes nicht zwangsläufig die Unkenntnis desselben bedeutet. Das Complete-Linkage-Verfahren ist ein angemessenes Verfahren, da es nichtmetrische Daten verarbeiten kann und nicht zu Kettenbildungen, sondern zur Bildung vieler kleiner Cluster neigt, wobei die Heterogenität zwischen den einzelnen Clustern maximal wird. Hinsichtlich einer möglichst guten Trennung der Arbeitsgruppen und möglicher Kleinstgruppenbildungen innerhalb der Arbeitsgruppen entspricht dies dem Forschungsinteresse. Schwellenwerte für

[105] Vgl. z.B. KRUMMHEUER (1999), STEINBRING (1998, 2000).
[106] Für die verwendete Notation vgl. Abschnitt 6.2.
[107] Die Auswahl und Codierung dieser Aspekte wurde für zwei Hefte von drei unterschiedlichen Personen getrennt voneinander vorgenommen und im Anschluss verglichen und auf eine eindeutige für alle zufriedenstellende Version reduziert. Auf dieser Grundlage wurden die anderen Hefte von einer Person kodiert und zum Schluss stichprobenhaft von den anderen beiden kontrolliert.
[108] Das Verfahren der Clusteranalyse wird als bekannt vorausgesetzt.

Clusterverschmelzungen werden nicht benötigt, da alle Cluster von Interesse sind. Zur Erkennung von Ausreißern wird vor der Durchführung des Complete-Linkage-Verfahren ein Single-Linkage-Verfahren durchgeführt.

Bei der nachfolgenden Analyse wird eine Gruppe (Gruppe 4: g4) nicht berücksichtigt. Bei dieser Gruppe handelt es sich um die einzige hinsichtlich des Geschlechts heterogen zusammengesetzte Gruppe mit vier Jungen und einem Mädchen. Diese Gruppe hat sich sehr häufig in verschiedenen Konstellationen geteilt. Zudem waren über einen längeren Zeitraum zwei Mitglieder dieser Gruppe erkrankt, so dass einige der Schülerinnen und Schüler sich für kurze Zeit anderen Gruppen angeschlossen haben. Infolgedessen ist es hier nicht möglich, allein auf Grundlage der Forschungshefte eine Aussage über die Art des Begriffsbildungsprozesses zu treffen.

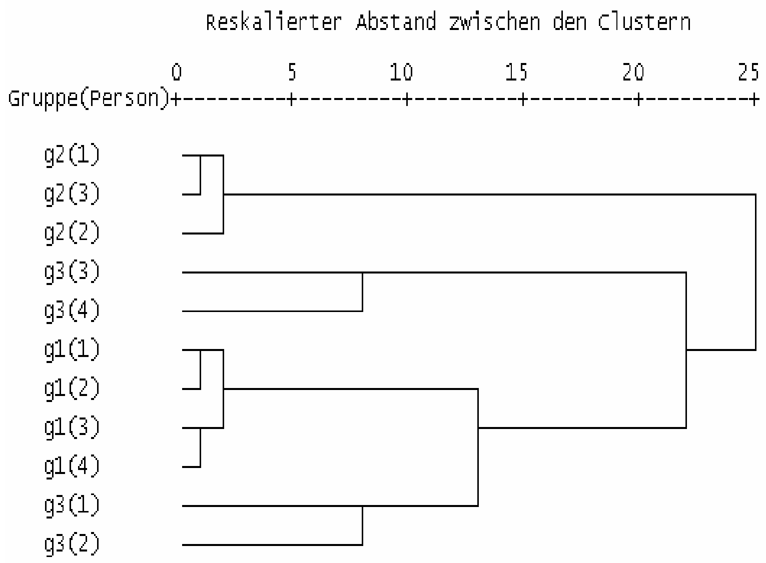


Abbildung 10.1. Dendogramm zu den Forschungsheften

Die Forschungshefte der anderen Schülerinnen und Schüler in den einzelnen Gruppen wurden, nach Aussage der Schülerinnen und Schüler, jeweils allein und zu Hause ohne Mithilfe der anderen Schülerinnen und Schüler angefertigt. Das lässt sich insoweit bestätigen, als dass die Hefte keine gleichen oder ähnlichen Formulierungen enthalten. Insofern lässt sich aus der Analyse dieser Hefte ein aussagefähiges Ergebnis erwarten.

Die Abbildung 10.1 zeigt das Dendogramm der Clusteranalyse nach dem Complete-Linkage-Verfahren. Das Single-Linkage-Verfahren explorierte zuvor keine Ausreißer.

Die Klassifizierung der Gruppen g1 und g2 stellt eine homogene Gruppenstruktur dar. Sie spiegelt sogar die Struktur innerhalb der Gruppen wider. Bei der Gruppe 2 handelt es sich um eine reine Jungengruppe. Alle Schüler dieser Gruppe sind leistungsstark, ein Schüler (g2(2))[109] tritt jedoch in seiner Leistungsfähigkeit besonders hervor, so dass sich die Schnelligkeit seiner Begriffsbildung auch in der Intensität der Auseinandersetzung mit den Inhalten und damit auch in seinem Forschungsheft zeigt. Hier scheint sowohl eine sozial als auch eine individuell beeinflusste Wissenskonstruktion vorzuliegen. Der individuelle Anteil lässt sich in diesem Beispiel auf unterschiedliche kognitive Fähigkeiten zurückführen.

Die Gruppen 1 und 3 sind reine Mädchengruppen. Die Schülerinnen in der Gruppe 1 arbeiteten den Großteil der Zeit gemeinsam zusammen. Dabei nutzten sie nie mehr als einen oder zwei Computer. In Phasen, in denen die durch die Probleme entwickelten Begriffe und Verfahren verallgemeinert werden sollten, teilte die Gruppe sich häufig in Zweiergrup-

[109] g2(3) z.B. meint Schülerin bzw. Schüler Nr. 3 aus der zweiten Gruppe.

pen (g3(1,2) und g3(3,4)) auf, um an verschiedenen Ansätzen zu arbeiten. Die Ergebnisse dieser Arbeitsphasen wurden anschließend in der ganzen Gruppe ausgehandelt. Diese immer wiederkehrende soziale Struktur deutet sich in der Bildung der Cluster an, was an dieser Stelle auf eine soziale Bedingtheit der Wissenskonstruktionen schließen lässt.

In den Gruppen 1 und 2 waren die Leistungsvoraussetzungen und die gezeigten Leistungen im Großen und Ganzen homogen.[110] Dies trifft auf die dritte Gruppe nicht zu. Während in den ersten beiden Gruppen die gemeinsame Arbeit mehr oder weniger gleichberechtigt organisiert war, war dies in der dritten Gruppe, trotz gutem Willen der Schülerinnen, nicht möglich. Zwei der vier Schülerinnen zeigten durchschnittliche bis schwache (g3(3,4)) und die anderen beiden Schülerinnen (g3(1,2)) zeigten gute bis sehr gute Leistungen. So wurden neue Ideen und Konstruktionen oftmals durch die beiden leistungsstärkeren Schülerinnen entwickelt und im Anschluss den anderen beiden erklärt. Die Forschungshefte der „guten" Schülerinnen sind insofern sehr ausführlich und detailliert gestaltet, wohingegen die Hefte der beiden anderen Schülerinnen an vielen Stellen zu oberflächlich sind. Es bilden sich jeweils zwei Cluster heraus, deren Objekte untereinander eine geringere Ähnlichkeit als die Objekte der anderen Cluster aufweisen. Die beiden leistungsschwächeren Schülerinnen arbeiteten des Öfteren in Stillarbeit. Insofern ist die Heterogenität nicht verwunderlich. Die beiden leistungsstärkeren Schülerinnen hingegen bearbeiteten alle Probleme während des Unterrichts mindestens zu zweit. Hier könnte der Einfluss der affektiven Dimension eine Rolle spielen. Eine dieser beiden Schülerinnen ist nach eigenen Worten durch diese „neue" Art des Unterrichts dazu motiviert worden über ein mögliches Mathematikstudium nachzudenken. Ihr Engagement über den Unterricht hinaus, sich mit Mathematik zu beschäftigen, scheint deutlich stärker ausgeprägt als bei ihrer Mitschülerin, was durch ihr Forschungsheft belegt wird. Der Einfluss der Leistungen auf die Klassifizierung der Schülerinnen dieser Gruppe ist im Dendogramm an der größeren Nähe von g3(1,2) zur Gruppe1 erkennbar, die vom Leistungsniveau mit diesen Schülerinnen vergleichbar waren. Damit wirken vermutlich sowohl leistungsbedingte kognitive als auch affektive Faktoren auf die Clusterbildung ein. Die sozialen Faktoren scheinen bei der Clusterbildung der beiden Zweier-Gruppen den Leistungsfaktoren untergeordnet zu sein.

Ein erstaunliches Phänomen ist die Unähnlichkeit der Forschungshefte der Jungen und der der Mädchen. Das liegt vermutlich in erster Linie an einer unterschiedlichen Schwerpunktsetzung bei der Auswahl der Intentionalen Probleme. Während keines der Mädchen das erste Problem (Wasserverbrauch in Bochum) in ihrem Forschungsheft festgehalten hat[111], wird dieses Problem von den meisten Jungen im Forschungsheft dargestellt. Darauf wird in der Analyse des Fragebogens zur Beurteilung dieser Unterrichtsform zurückgekommen.

Somit gibt die Clusteranalyse der Forschungshefte in Teilen die soziale Situation im Unterricht wider. Das deutet auf eine ausgeprägte sozial bedingte Begriffsbildung hin. Auf Grundlage dieser Untersuchung kann dies natürlich keine fundierte Hypothese sein, da viele Einflussfaktoren unberücksichtigt geblieben sind und die Analyse von sozialer bzw. individueller Begriffsbildung auch die Interaktionen zwischen den Schülerinnen und Schülern während des Unterrichts einbeziehen muss. Sie gibt jedoch Anlass dazu, auf Grundlage des zu Grunde liegenden theoretischen Konzeptes diesen Aspekt in Nachfolgeuntersuchungen eingehender zu analysieren.

Für die Gruppe 1 liegen Protokolle über die Interaktion zwischen den Schülerinnen dieser Gruppe für den gesamten Zeitraum der Untersuchung vor, die unter dieser und anderen Fragestellungen in nachfolgenden Arbeiten analysiert werden. Einen kleinen Eindruck über

110 Auch wenn ein Junge in der Jungengruppe besonders leistungsstark war, handelte es sich bei den anderen beiden ebenfalls um gute Schüler.

111 Es haben alle Schüler und Schülerinnen im LKUC alle Probleme bearbeitet. Es mussten jedoch nicht alle Probleme im Forschungsheft dargestellt werden.

die soziale Bedingtheit der Begriffsbildung vermittelt die nachfolgende Gegenüberstellung zweier Forschungsheftauszüge aus dieser Gruppe.

Auszug 1 aus FH[112] von Nicole (g1(1))[113]

> Doch wie kann man den Flächeninhalt unter einer Kurve errechnen?
> Wir versuchen das an dem Beispiel x^2:
>
> #Graph von x^2 mit Derive erstellt.#
> Barbara und ich zeichnen zunächst Kästchen in den Bereich zwischen
> dem Graphen von x^2 und der x-Achse und zählen diese!
> #Graph von x^2 mit einer feineren Skalierung.#]
>
> Doch wir hatten Probleme die Anzahl dieser Kästchen festzulegen, da manche nur
> halb, zu 2/3 oder 5/8 etc. unter dem Graphen von x liegen. Deshalb haben wir
> noch kleinere Kästchen gemalt, um mehr komplette Kästchen unter dem Graphen zu
> haben.
>
> [#Derive-Datei: #
> #Graph von x^2 noch feiner skaliert.#]
>
> Doch wir hatten immer noch das gleiche Problem und nach einiger Zeit, waren wir
> es auch Leid immer kleinere Kästchen zu zählen.
>
> [Dann schlossen wir uns Claudia und Simone an, die folgende Idee hatten
> #grün geschrieben#]
>
> Claudia und Simone hatten in der Zwischenzeit Balken in die Abbildung des Graphen
> von x^2 gezeichnet. Und zwar einmal Balken, die knapp [unterhalb der Kurve
> des Graphen #rot geschrieben#]liegen und Balken, die [knapp oberhalb des
> Graphen #blau geschrieben#] liegen.
>
> [#Derive-Datei:#
> #Graph von x^2 mit blauen und roten Rechtecken oberhalb und unterhalb des #
> #Graphen.#]

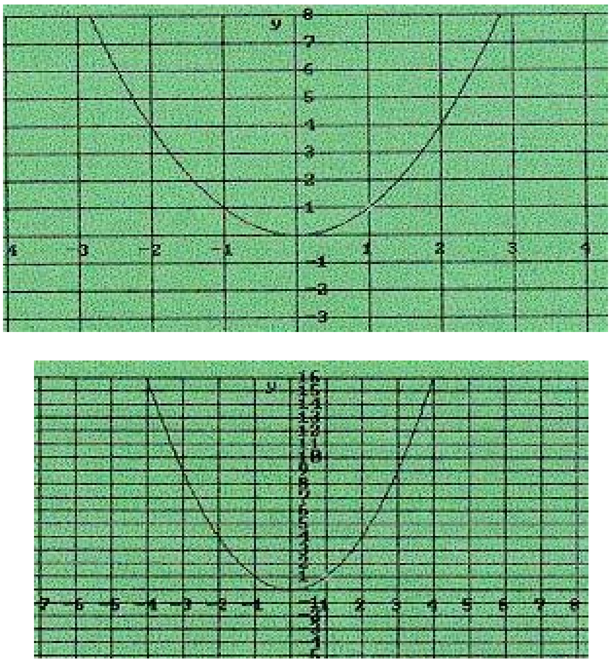
Auszug 2 aus FH von Claudia (g1(3))

> 3)Um den Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve zu berechnen,
> ist es unserer Meinung nach am einfachsten, Balken unter die
> Kurve zu zeichnen, und deren Flächeninhalt zu berechnen:
>
> [#Derive-Datei: Graph (x^2) mit roten Rechtecken unter dem Graph und
> blauen Rechtecken über dem Graph#]
>
> Man kann bei dieser Unterteilung die Balken entweder überlappen
> oder unterlappen lassen.
> Je mehr Balken man unter die Kurve zeichnet, desto genauer wird
> der Flächeninhalt!

[112] FH: Forschungsheft. Die Forschungshefte sind fortlaufend nummeriert. Die Nummerierung wurde mit Hilfe des Programms WinMax erstellt. Die Namen der Schülerinnen und Schüler wurden geändert.
[113] Die Zeilennummerierung der Forschungsheftauszüge entspricht der fortlaufenden Nummerierung des jeweiligen Forschungshefts.

Nicole und Barbara versuchten mit Hilfe der Zoomfunktion von DERIVE den Flächeninhalt unterhalb der Funktion *f* mit $f(x) = x^2$ zu bestimmen. Dazu stellten sie das Koordinatensystem mit Gitterlinien dar und vergrößerten Schritt für Schritt den Bildschirmausschnitt. Dabei bemerkten sie nicht, dass nicht nur die Kästchen, sondern der gesamte Bildschirmausschnitt verkleinert wird (vgl. Abbildung 10.2). Das ist an dieser Stelle jedoch nicht von Bedeutung.

Abbildung 10.2. Ausschnitte aus dem Forschungsheft von Nicole



Nach jedem Schritt zählten sie die Kästchen unter dem Graphen und stellten dann fest, dass das offensichtlich angestrebte Ziel, dass die Kästchen *vollständig* unterhalb des Graphen liegen, nicht erreichbar ist. Während dieses Versuches, zeichneten die anderen beiden Schülerinnen dieser Gruppe, Simone und Claudia, Rechtecke „unter" und „über" den Graphen, so wie üblicherweise die Veranschaulichung des Riemann-Integrals durchgeführt wird.[114] Aufgrund des Misserfolgs bei der eigenen Arbeit und der Aussicht auf Erfolg bei den Mitschülerinnen aus der Gruppe, beendeten Nicole und Barbara ihren Versuch und „schlossen [sich] Claudia und Simone an" (Auszug 1, Z. 380). Sie nahmen damit einen Richtungswechsel vor, der ohne eine solche Offerte vermutlich nicht stattgefunden hätte. Daran lässt sich erkennen, dass soziale Prozesse auf die individuelle Begriffsbildung einwirken. Inwieweit diese sozialen Prozesse durch individuelles Wissen bzw. durch „Gruppenwissen" beeinflusst sind, kann hier nicht weiter analysiert werden.

Dieser Interaktionsprozess und die Clusteranalyse der Forschungshefte geben jedoch Anlass zu der Vermutung, dass man nicht allein von individueller bzw. sozialer Wissensbildung ausgehen kann, sondern dass Wissenskonstruktion sich in den drei oben beschriebenen Dimensionen, der affektiven, der kognitiven und der sozialen Dimension, miteinander wechselwirkend vollzieht, wobei der sozialen Dimension ein größeres Gewicht als der kognitiven Dimension zuzukommen scheint.

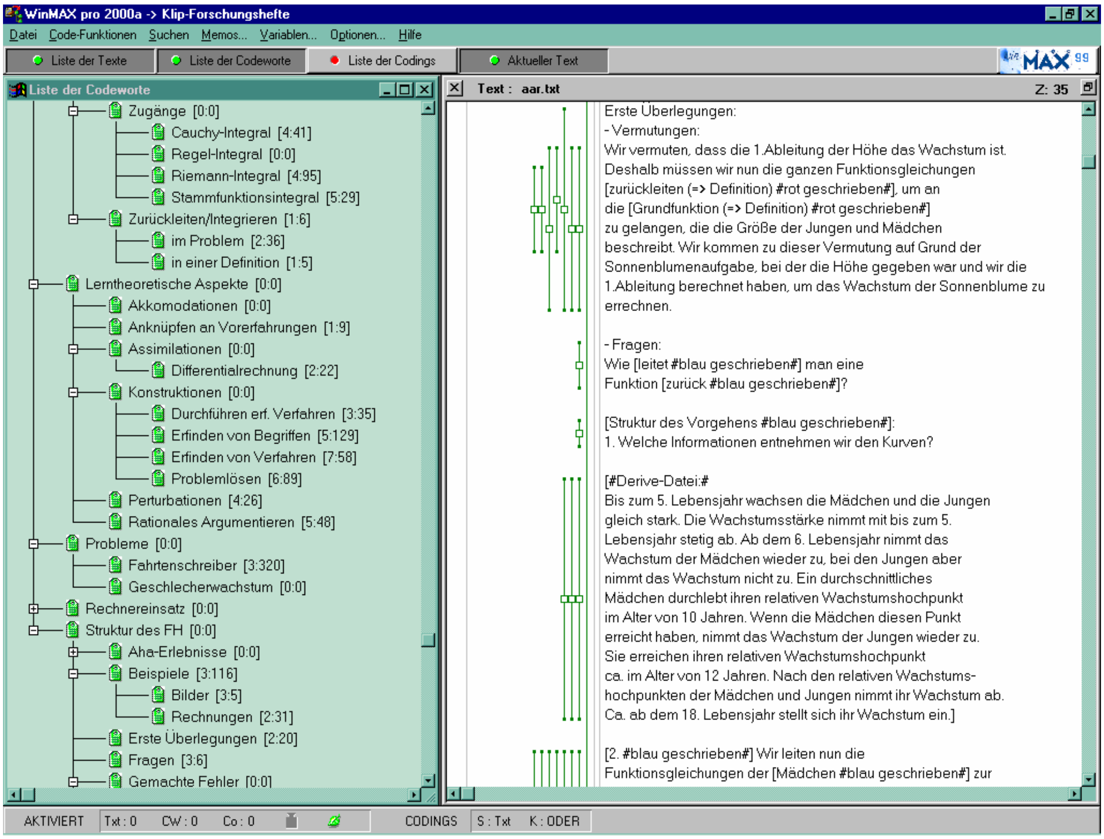
10.2 Begriffsbildung in den Forschungsheften

Die empirische Auswertung der Forschungshefte folgt der in Kapitel 3 dargestellten Analyse der Begriffsbildung auf Basis des epistemologischen Dreiecks. Zentrale Fragestellung dieser Analyse ist die Frage (1a). Hierzu wird der Zusammenhang zwischen den Intentionalen Problemen und dem durch diese angeregten Begriffsbildungsprozess hinsichtlich der in Kapitel 7 dargestellten üblicherweise verwendeten Integralbegriffe untersucht. Es geht dabei nicht um die Beurteilung der Korrektheit der Begriffsbildungen hinsichtlich der Normen der regulären Mathematik, sondern um die Nützlichkeit der Begriffe zur Lösung der Probleme. Die Beziehung Referenzkontext, mathematisches Modell und Begriff bildet den Untersuchungsschwerpunkt dieses Abschnitts. Dazu werden insbesondere die Pertur-

[114] Vgl. Abbildung 10.5.

bationen und Konstruktionen, die durch die Relation des von den Schülerinnen und Schülern entwickelten mathematischen Modells und des Referenzkontextes der Intentionalen Probleme entstehen, thematisiert.

Abbildung 10.3. Screen-Shot des Programmes WinMAX pro 2000



In Abbildung 10.3 ist ein Sreen-Shot des zur Auswertung der Forschungshefte verwendeten Programmes WinMax pro 2000 zu sehen. Auf der rechten Bildschirmseite ist der transkribierte Text abgebildet und auf der linken Seite die Liste der Kodierungsworte (vgl. auch Abschnitt 14.1). Die Zahlen in den Klammern hinter den Kodierungsworten gibt die Häufigkeit der jeweiligen Kodierung und die Anzahl der mit diesem Kodierungswort kodierten Zeilen. Die vertikalen grünen Linien auf der rechten Seite kennzeichnen die Abschnitte, die mit einer bestimmten Kodierung markiert sind. So ist beispielsweise der Abschnitt mit der Überschrift „Fragen" mit dem Kodierungswort Fragen belegt, das insgesamt dreimal auf sechs Zeilen dem Text zugewiesen wurde.

Diese Kodierung wurde für alle Forschungshefte entsprechend der in Abschnitt 10.1 dargestellten Weise durchgeführt. Die einheitliche Kodierung beruht nicht allein auf einer individuell geprägten Sicht, sondern wurde zumindest von einer kleinen Gruppe von Lehrerinnen und Lehrern ausgehandelt.

Transkribiert wurde nur der Text der Forschungshefte. Auf die Einfügung von Abbildungen oder komplizierten Formeln wurde aus programmbedingten Gründen verzichtet. Auf die Auslassung von Abbildungen oder Formeln, die meist in Form von DERIVE-Dateien eingegeben waren, wird verwiesen. Ist Text aus diesen Umgebungen entnommen, ist dies kenntlich gemacht. Ebenso werden farbliche oder andere Hervorhebungen gekennzeichnet. Die Transkriptionsregeln sind in der nachfolgenden Übersicht aufgeführt.

Tabelle 10-1. Kodierungstafel

Zeichen	Bedeutung
#blau geschrieben#	Kommentar zur Schriftfarbe
[...]	Begrenzungszeichen für hervorgehobene Textabschnitte
[zurück #blau geschrieben#]	zurück
[#DERIVE Datei# Bis zum ...]	Text aus einer DERIVE-Datei transkribiert
#Graph von x^2#	Im FH ist an dieser Stelle ein mit der Hand gezeichneter Graph der Funktion x² abgebildet.
[#DERIVE Datei: 2 Graphen von x^2, ein kleiner und ein großer Ausschnitt#]	Verweis auf einen mit DERIVE erstellten Graph

In der nachfolgenden Analyse der Forschungshefte wird das Forschungsinteresse gemäß der Frage 1a auf die Relation zwischen den in den Forschungsheften dokumentierten Begriffen und Aspekten der Integralrechnung und den Intentionalen Problemen fokussiert. Mit Hilfe des Programms WinMAX können die durch einen Aspekt kodierten Zeilen aller Forschungshefte gleichzeitig verfügbar gemacht und verglichen werden. Somit ist es möglich die Begriffe und Aspekte getrennt voneinander zu untersuchen.

In allen Kursen zusammen wurden knapp 1500 Forschungsheftseiten erstellt. Davon werden, wie schon in Abschnitt 10.1, nur die Hefte aus dem Kurs LKUC untersucht. Da Wechselwirkungen in der Begriffsbildung zwischen den Kursen ausgeschlossen werden können und dieser Kurs mit der Begriffsbildung am Weitesten und Intensivsten vorangekommen ist, ermöglicht die Reduktion auf einen Kurs die Darstellung und Vergleichbarkeit der aus den Intentionalen Problemen erzeugten Begriffe.

Da es in diesem Abschnitt nicht um eine lückenlose Dokumentation des Begriffsbildungsprozesses aller Schülerinnen und Schüler geht, werden im Folgenden die entwickelten Aspekte und Begriffe exemplarisch auf Basis relevanter Auszüge aus den Forschungsheften vorgestellt. Zur Einordnung der Begriffe und Aspekte in den Kontext der Aufgaben orientiert sich die Darstellung an den Intentionalen Problemen und an den Lösungsprozessen der Schülerinnen und Schüler zu den einzelnen Problemen. Damit jedoch die Gliederung entlang der Probleme nicht zu einer unzusammenhängenden Darstellung der entwickelten Begriffe und Aspekte der Integralrechnung führt, werden die Begriffe und Aspekte *den* Problemen zugeordnet, die wesentlich zu deren Generierung beigetragen haben. Dabei werden die Probleme in der Reihenfolge diskutiert, die eine inhaltlich konsistente Darstellung des Begriffsbildungsprozesses erlaubt. Hinsichtlich der Einordnung der Begriffe und Aspekte in den Kontext der Probleme wird zu Beginn der Diskussion eine kurze Übersicht über den Bearbeitungsprozess des jeweiligen Intentionalen Problems vorgestellt.

Darüber hinaus wird darauf geachtet, dass die Darstellung der einzelnen Aspekte und Begriffe von möglichst wenigen Schülerinnen und Schülern und aus möglichst wenig unterschiedlichen Gruppen stammen. So lässt sich auch der individuelle bzw. soziale Begriffsbildungsprozess nachvollziehen. Die Auswahl der Forschungshefte orientiert sich sowohl an inhaltlichen Gesichtspunkten als auch an der Repräsentativität des jeweiligen Forschungshefts. Das Maß an Repräsentativität entspricht der Abstandsumme eines Forschungshefte zu allen anderen Forschungsheften. Der Abstand wird über das Jaccard-I-Maß bestimmt. Die kleinste Summe hat somit die größte Repräsentativität. Es lassen sich Kurs- und Gruppenrepräsentativität unterscheiden.

Das gewählte Verfahren ermöglicht einen exemplarischen Gang entlang des Begriffsbildungsprozesses. Dieser Begriffsbildungsprozess ist gruppenspezifisch und individuell unterschiedlich. Der hier dargelegte Weg stellt somit nur einen möglichen Weg dar. Auf andere Bearbeitungsverläufe wird verwiesen.

10.2.1 Die Fahrtenschreiberaufgabe

Eine bei dieser Aufgabe häufig entwickelte Kernidee war die Frage nach der Zuverlässigkeit der Aussage von Frau Grat (vgl. Auszug 3). Darauf aufbauend besaß die Klärung des Problems, welche Strecke Frau Grat tatsächlich zurückgelegt hat, Orientierungs- und Motivierungsfunktion für die Schülerinnen und Schüler.

Auszug 3 aus FH von g1(3)

Der Fahrtenschreiber
Problemstellung:
#Arbeitsblatt ausgeschnitten#
Hat Frau Grat die Wahrheit gesagt?
#Grafik des Fahrtenschreibers#
Erste Überlegungen:
Vermutungen:
Da wir keine Funktion haben, wie z.B. bei der "Wachstums-
Aufgabe" müssen wir versuchen die gefahrene Strecke aus dem
Graphen zu sehen.
Fragen:
Kann man aus einem Graphen ein genauso eindeutiges Ergebnis
erhalten, wie man es mit einer Funktion errechnen könnte?

Bei vielen Schülerinnen und Schülern stand die mit der ersten Kernidee zusammenhängende Frage nach der Zuverlässigkeit einer mathematischen Beschreibung eines „ungenauen“ Graphen (248-50) im Zentrum ihres Interesses. Dies ist bemerkenswert, da die Schülerinnen und Schüler sehr schnell auf ein innermathematisches Problem zu sprechen kamen, dass die zentrale Kernidee dieser Aufgabe bildet. Diese Schwierigkeit gab für einige Schülerinnen und Schüler den Anlass sich erst mit einem anderen Problem zu beschäftigen.

Hier spiegelt sich ein Verständnis von Mathematik als einer korrekten Wissenschaft wider. Aber es drückt auch ein Bedürfnis und eine Erwartungshaltung aus, wie Mathematik zu sein hat. Damit sind Anfangsschwierigkeiten mit der Unterrichtsform verbunden, die den Schülerinnen und Schülern zugestanden wurden, die sich jedoch auch im Laufe der Zeit legten und die Akzeptanz beispielweise der Fahrtenschreiberaufgabe mit der Bearbeitungsdauer ansteigen ließen (vgl. Kapitel 13).

Neben diesen Kernideen diskutierten die Schülerinnen und Schüler die Realitätsnähe der Aufgabe, d.h. beispielsweise: Ist ein plötzliches Aussetzen und Einsetzen des Fahrtenschreibers überhaupt möglich? Zudem wurden rechtliche Anforderungen an die Fahrerin eines Lastkraftwagen diskutiert, die natürlich für die Schülerinnen und Schüler kurz vor dem achtzehnten Lebensjahr von Bedeutung sind.

Der übliche Bearbeitungsweg sah die Bestimmung der Strecke aus der Differenz der Start- und der Ankunftszeit (vgl. Abbildung 8.2) vor. Diese musste mit der durch das Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm gegebenen Strecke verglichen werden.

Auszug 4 aus FH von g1(3)

252:	Struktur des Vorgehens:
253:	Lösungen:
254:	1.Schritt:
255:	Wir unterteilen den Graphen in grobe Teile und errechnen mit
256:	der Formel:
257:	Geschwindigkeit*Zeit = Strecke
258:	die gefahrene Strecke.

Dazu unterteilten alle Schülerinnen und Schüler die Zeitachse in Teilabschnitte, so dass die Geschwindigkeitskurve möglichst gut durch Treppenfunktionen approximiert wurde (255-70). Einige Schülerinnen und Schüler erkannten zu diesem Zeitpunkt schon, dass die Strecke der Fläche unter dem Graphen der Kurve entspricht. Für diese Schülerinnen und Schüler war es möglich die Kurve statt mit Treppenfunktionen auch mit linearen Funktionen zu approximieren. Die Argumente hinsichtlich der Güte der Approximation waren sehr unterschiedlich und werden im nächsten Abschnitt eingehend untersucht.
Mit Hilfe der Beziehung von Strecke und Geschwindigkeit (z.B. 257) bestimmten die Schülerinnen und Schüler die zurückgelegten Strecken für die Teilabschnitte und summierten sie auf, um sie mit der zuvor berechneten Differenz aus den Kilometerständen zu vergleichen. Dies ermöglichte ihnen die Zuverlässigkeit der Aussage von Frau Grat zu beurteilen. Es stellte sich erwartungsgemäß heraus, dass Frau Grat gelogen hatte, doch die Genauigkeit der Werte befriedigte nicht das Forschungsinteresse der Schülerinnen und Schüler, so dass sie eine feinere Unterteilung der Zeitachse vornahmen, um so erneut die Strecke zu bestimmen (vgl. Auszug 5 und Auszug 17 im Anhang A).

Auszug 5 aus FH von g1(1)

259:	
260:	#Grafik des Fahrtenschreibers#
261:	
262:	15 min. 30km/h = 7,5km
263:	75min. 80km/h = 100km
264:	20min. 50km/h = 16,2/3km
265:	60min. 79km/h = 70km
266:	30min. 90km/h = 45km
267:	45kmi. 90km/h 67,5km
268:	30min. 5km/h = 2,5km
269:	60min. 30km/h = 30km
270:	10min. 5km/h 5/6km

Dabei zeigten die Mädchen deutlich mehr Beharrlichkeit als die Jungen, die Abschnitte in immer kleinere Teile zu zerlegen. Da es sich aber abzeichnete, den exakten Wert auf diese Art und Weise nicht bestimmen zu können, suchten einige Schülerinnen und Schüler ein anderes Verfahren mit der damit verbundenen Kernidee: „Wie lässt sich also die zurückgelegte Strecke exakter bestimmen?“ (g3(2)). Andere Schülerinnen und Schüler hingegen waren mit ihren Ergebnissen zufrieden, so dass sie versuchten, diese zu verallgemeinern.
Trotz dieser unterschiedlichen Fragestellungen setzten beide Gruppierungen ihren weiteren Forschungsprozess vergleichbar fort. Die Schülerinnen und Schüler identifizierten die gesuchte Strecke mit der Fläche unter dem Funktionsgraphen und versuchten an Spezialfällen, wie z.B. lineare oder quadratische Funktionen, ein allgemeines Verfahren zur Flächenbestimmung zu generieren. Resultat dieser Bemühungen waren Formeln zur Berechnung von Flächen zwischen einer beliebigen stückweise stetigen Funktion und der Rechtsachse. Die Verfahren erwiesen sich jedoch ebenfalls nicht hinreichend zur Verbesserung der Genauigkeit der zu bestimmenden Strecke, so dass die Schülerinnen und Schüler nun zwar ein allgemeines Verfahren zur Flächenbestimmung entwickelt hatten, ihre anfängliche Fragestellung jedoch immer noch nicht erfolgreich beantworten konnten. An dem Verfahren wurde ihnen jedoch klar, dass zur exakten Bestimmung der Strecke eine Grenzwertbetrachtung notwendig wird. Da dies bei der Fahrtenschreiberaufgabe nicht möglich ist, zeigten die Schülerinnen und Schüler sich mit dem Ergebnis letztendlich zufrieden und schlossen die Bearbeitung dieses Problems ab.

In der „Verallgemeinerungsphase“ wurden insgesamt drei unterschiedliche Verfahren entwickelt, die ebenso viele unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten des Problems bereitstellten und bei vielen Schülerinnen und Schülern die Frage nach dem geeignetsten Verfahren erzeugten. Die Verfahren wurden in der divergierenden und regulären Phase intensiv diskutiert.

10.2.1.1 Aspekte und Begriffe der Integralrechnung – Teil 1

Die Generierung unterschiedlicher Verfahren deutete sich schon in den Argumentationen zur Approximation der Kurve an. Ein Teil der Gruppe 4 unterteilte die Zeitachse zuerst äquidistant und wählte eine Zerlegung in Treppenfunktionen, die sich an den Funktionswerten der ersten Stelle jedes Intervalls orientierte. Nach Diskussionen innerhalb der Gruppe hinsichtlich interpretatorischer Schwächen des gewählten Zuganges, gaben sie diesen auf und verfolgten einen Ansatz, den auch die dritte Gruppe entwickelte. Die Zeitachse wurde in Teilabschnitte zerlegt, dass es möglich war, die Kurve durch Treppenfunktionen und lineare Funktionen so zu approximieren, dass die Summe der Streckendifferenzen zwischen Treppenfunktion und linearer Funktion ungefähr den Wert Null annahm. Diese Gruppe hatte schon sehr früh die Strecke als Fläche identifiziert.

Die anderen beiden Gruppen approximierten die gegebene Kurve derart mit Treppenfunktionen, dass die Summe der Differenzen zwischen Treppenfunktion und approximierter Funktion auf den einzelnen Teilabschnitten möglichst klein wurde. Die Funktionswerte der Treppenfunktionen interpretierten sie als Durchschnittsgeschwindigkeiten.
So wurden in den Gruppen unterschiedliche Ansätze zur Approximation der Strecke entwickelt. Das war sehr erfreulich, da diesen Ansätzen auch unterschiedliche Integralbegriffe zu Grunde liegen, wodurch die in Abschnitt 8.2 beschriebene begriffliche Breite dieses Problems von den Schülerinnen und Schülern ausgeschöpft werden konnte. Die Variation verschiedener Ideen wurde in dieser Vielfalt von mir nicht erwartet. Es war vielmehr zu vermuten, dass die in einer Gruppe erfolgreich entwickelten Strategien an die anderen Gruppen weitergegeben werden. Stattdessen arbeitete jede Gruppe für sich allein und es schien so, als ob über den Unterricht hinaus gruppenübergreifend kein inhaltlicher Austausch stattfand.

Auszug 6 aus FH von g4(3)

> [Berechnung der Durchschnitts-
> geschwindigkeit: #grün geschrieben#]
>
> Nehme für besonders gute Zeit-
> abschnitte an, dass die Frau
> in dieser Zeit genau eine Ge-
> schwindigkeit gefahren wäre.
> Dazu lege ich genau parallel zu
> x-Achse eine Strecke so
> in den Fahrtenschreiber, dass
> die Strecke nach oben und nach
> unten möglichst wenig Abstand
> zur Kurve des Fahrtenschreibers
> hat. Das ist für den Bereich
> zwischen 5 Uhr und 6 Uhr relativ
> einfach.
> Das mache ich für alle Abschnitte.
> (siehe Fahrtenschreiber)

Den unterschiedlichen Verfahren lagen unterschiedliche Integralbegriffe zu Grunde, so dass im Folgenden die Entwicklungsprozesse dieser Begriffe getrennt dokumentiert und analysiert werden. Dabei wird die Diskussion der beiden Grundvorstellungen der Kumulation und des Gesamteffekts in alle Abschnitte eingebunden.

Das Regel-Integral und A-Aspekt. Der Schüler aus Gruppe 4 (vgl. Auszug 6) wollte hinsichtlich einer einfacheren Berechnung der Strecke die Durchschnittsgeschwindigkeit auf den Teilabschnitten bestimmen. Dazu wählte er Teilstücke aus, die ihm besonders geeignet erschienen (203) und orientierte sich an den Abschnitten, in denen die Geschwindigkeit nahezu konstant war (213-15). Dazu wurde die Vorstellung einer Treppenfunktion von ihm entwickelt (207-8).

Interessant jedoch ist die Interpretation einer Durchschnittsgeschwindigkeit (209-13). Diese zeichnet sich durch möglichst geringe Abweichungen zum Maximal- und Minimalwert der tatsächlich gefahrenen Geschwindigkeit aus. Eine derartige Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit ist natürlich problematisch, wenn man beispielsweise den Bereich zwischen $9^{\underline{00}}$ und $10^{\underline{00}}$ Uhr betrachtet (vgl. Abbildung 8.2). Eine Zeichnung im Forschungsheft des Schülers deutet auch daraufhin, dass er seiner eigenen Beschreibung nicht gefolgt ist, sondern tatsächlich die Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmte. Diesem Widerspruch kann die Schwierigkeit zu Grunde liegen, die Durchschnittsgeschwindigkeit einer stetigen Geschwindigkeitskurve sprachlich zu beschreiben. Eine inhaltliche Deutung des Vorgehens entspricht dem A-Aspekt. Der Schüler versucht durch bekannte Funktionstypen eine unbekannte Funktion zu approximieren. Diesem Grundgedanken liegt die Idee der Regelfunktion zu Grunde. Der Integralbegriff, der hieran anschließend entwickelt werden konnte, ist der des Regelintegrals.

In der weiteren Bearbeitung bestimmte der Schüler die Produktsummen, wobei er explizit den Flächeninhaltsaspekt nicht verwendete (227-8). Das Ergebnis erschien ihm zu ungenau (265-6), so dass er mit einer weiteren Zerlegung der Teilabschnitte eine Verbesserung erzielen wollte. Dies weist neben den Grundvorstellungen der Kumulation und des Gesamteffekts auf eine Deutung der Strecke mit Hilfe des Regel-Integrals (267-73).

Auszug 7 aus FH von g4(3)

227:	Dann multizipliere ich die Höhe
228:	der Strecke mit ihrer Länge. Die Höhe
229:	ist die Durchschnittsgeschwindigkeit
230:	und die Länge ist die Zeit.
231:	Durch die Formel km/h*h lässt sich
232:	so aus den eingezeichneten Strecken
233:	die zurückgelegte Strecke errechnen.

265:	Das Ergebnis, das ich berechnet
266:	habe, ist noch sehr ungenau.
267:	Deswegen lege ich nach demselben
268:	Prinzip wie vorhin mehr Strecken
269:	in den Fahrtenschreiber. Dadurch
270:	werden der Abstand zwischen
271:	Kurve und Strecke immer kleiner.
272:	Und der ist, jedenfalls theoretisch,
273:	irgendwann weg.

Auszug 8 aus FH von g4(3)

416:	Definitionen für Integrale:
417:	
418:	[1.Definition: #rot geschrieben#]
419:	Ein Integral in dem Intervall [a,b] bestimmt
420:	man mit Hilfe von sogenannten [Höhenfunktionen
421:	#rot unterstrichen#].
422:	Man unterteilt die x-Achse in dem Bereich
423:	in Teilabschnitte. Für jeden Teilabschnitt legt
424:	man eine Höhenfunktion in den Graphen.
425:	Dann lässt man die Zahl der Teilabschnitte
426:	gegen unendlich laufen. Das Integral I ist dann
427:	die Summe aller Produkte aus Länge der
428:	Höhenfunktion (Länge des Teilabschnitts) und
429:	Höhe der Höhenfunktion (Funktionswert).
430:	
431:	[2.Definition: #rot geschrieben#]
432:	Eine Höhenfunktion ist eine konstante Funktion,
433:	die möglichst wenig Abstand zu der Funktion
434:	f hat.

Diese Deutung setzte der Schüler am Ende der Problembearbeitung in Form einer Definition fort (vgl. Auzug 8). Jedoch formuliert er die Konvergenzanforderungen nicht exakt. Es wird nicht klar, ob das Supremum aller Abstände gegen den Wert Null konvergieren soll, obwohl die Formulierung in 267-73 darauf hindeutet.

An dieser Stelle wird schon ersichtlich, dass die Fahrtenschreiberaufgabe als Referenzkontext die Konstruktion der Grundvorstellungen Kumulation und Gesamteffekt, des A-Aspektes und einer Idee des Regel-Integrals gestattet. Die nachfolgenden epistemologischen Dreiecke (vgl. Abschnitt 3.2) verdeutlichen diesen Zusammenhang. Zuerst wurde der Referenzkontext sukzessive eingeschränkt und parallel zur Begriffsentwicklung wieder erweitert.

Fahrtenschreiberproblem
↓
Streckenbestimmung
↓
Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit

Abbildung 10.4. Der Referenzkontext

Epistemologische Dreiecke 1 & 2

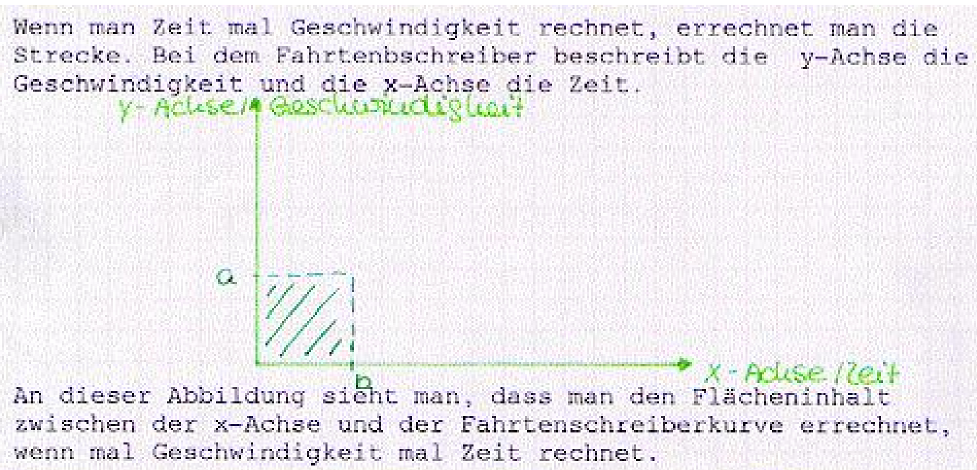
Durchschnitts-geschwindigkeit → Approximation durch Treppenfunktionen
↕ A-Aspekt & Regelfunktionen

Streckenbestimmung → Grenzwert der Produktsummen
↕ Regel-Integral, Kumulation & Gesamteffekt

Diese Einschränkung des Referenzkontextes wurde in allen Gruppen vergleichbar vorgenommen. Die Approximation durch Funktionen und nicht durch Flächen war ebenfalls bei fast allen Schülerinnen und Schülern die primär entwickelte Interpretation. Hinsichtlich des weiteren Begriffsbildungsprozesses, d.h. der Generierung eines geeigneten Integralbegriffs, unterscheidet sich dieser Zugang jedoch fundamental von allen anderen gewählten Zugängen. Während in diesem Ansatz Funktionen approximiert wurden, identifizierten andere Schülerinnen und Schüler die Strecke mit der Fläche unter dem Graphen und untersuchten Spezialfälle unter Zuhilfenahme von linearen und quadratischen Funktionen.

Das Riemann-Integral und der F-Aspekt. Nachdem die Schülerinnen und Schüler erkannt hatten, dass die Strecke der Fläche zwischen der Zeitachse und der Fahrtenschreiberkurve entspricht (vgl. Auszug 1 & 2, Abbildung 10.4), wählten sie hinsichtlich der exakten Bestimmung der zurückgelegten Strecke den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ (vgl. Auszug 1 & 2) als Beispiel zur Durchführung einer Flächenbestimmung.

Abbildung 10.5. „Strecke = Fläche" g1(3)

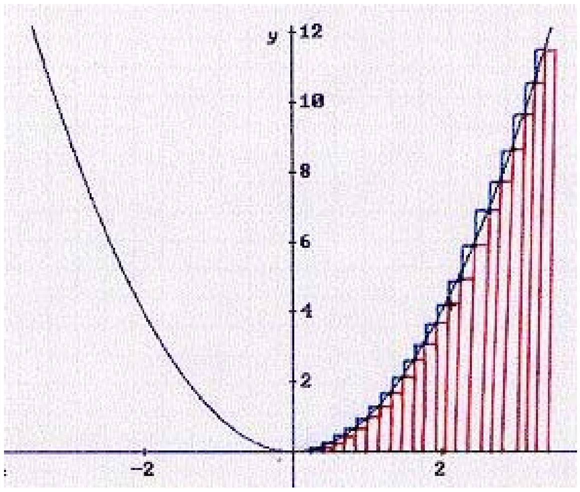

Wenn man Zeit mal Geschwindigkeit rechnet, errechnet man die Strecke. Bei dem Fahrtenbschreiber beschreibt die y-Achse die Geschwindigkeit und die x-Achse die Zeit.

An dieser Abbildung sieht man, dass man den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und der Fahrtenschreiberkurve errechnet, wenn mal Geschwindigkeit mal Zeit rechnet.

Nach einigen Bemühungen, die mehr Hindernisse auftaten als Erfolg bescherten (vgl. Auszug 1, 2 und Abbildung 10.1), entwickelten zwei Schülerinnen aus dieser Gruppe die Idee, den Graphen von unten und von oben mit Rechteckflächen zu approximieren. Das zentrale Argument für diesen Ansatz lautete (vgl. Abbildung 10.5): „Die blaue Strecke (Fläche) entspricht der Perspektive der Polizei, die die Frau überführen möchte, und die rote Strecke (Fläche) der Perspektive zu Gunsten der Frau, der man die Ungenauigkeit der Messung nicht zu Lasten legen kann“ (g1(3)).

Damit hatten die Schülerinnen eine inhaltliche und anschauliche Interpretation des Riemann-Integrals erfunden, die aus dem Forschungsinteresse der Schülerinnen erwachsen ist und hinsichtlich ihrer angestrebten Ziele nützlich erscheint.

Abbildung 10.6. Das Riemann-Integral bei der Fahrtenschreiberaufgabe von g1(2)



Im Folgenden sind die Begriffsbildungsschritte im Einzelnen dargestellt:

Epistemologische Dreiecke 3 &4

Streckenbestimmung $\xleftrightarrow{\text{Genauigkeit}}$ Strecke = Fläche

F-Aspekt

$f(x) = x^2$ $\longleftrightarrow$ Summe von Rechtecken

F-Aspekt, Kumulation & Gesamteffekt

Epistemologische Dreiecke 5 & 6

Strecke = Fläche $\longleftrightarrow$ Flächenbestimmung bei $f(x) = x^2$

F-Aspekt

$f(x) = x^2$ & Fahrtenschreiberaufgabe $\longleftrightarrow$ Ober- & Untersummen

Riemann-Integral

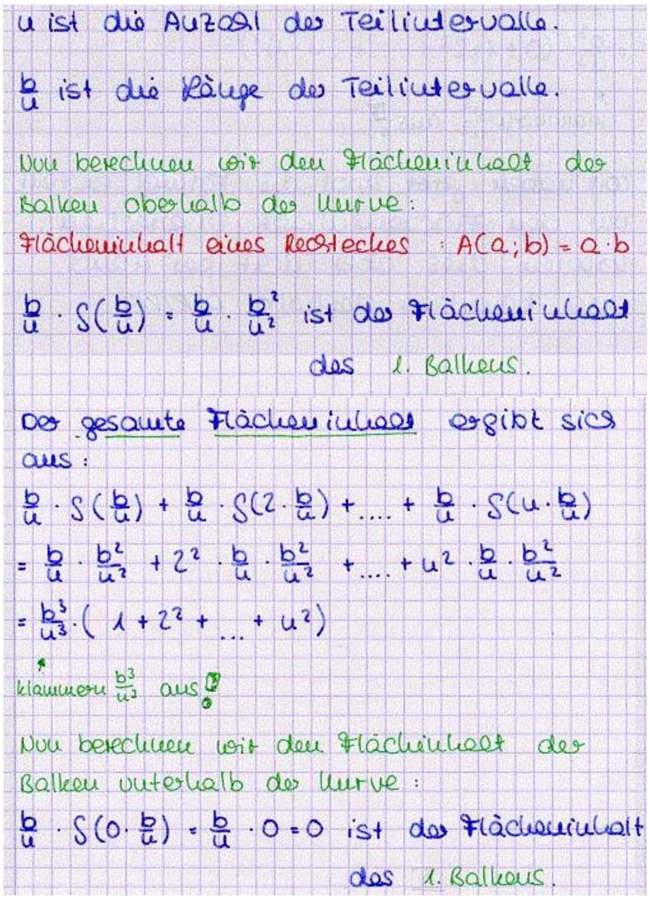
Die zurückgelegte Strecke wurde wegen $v = s/t$ als Fläche verstanden (257, Auszug 4). Die Genauigkeitsansprüche der Schülerinnen führten zu einer Perturbation, die das Modell

„Strecke = Fläche" zum Referenzkontext werden ließ, wobei das Gewicht nun auf der Flächenbestimmung lag, welche mit Hilfe einer Spezifikation auf eine Parabel durchgeführt wurde. Den Relationen zwischen Referenzkontext und Modell liegt der F-Aspekt zu Grunde. Die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse wurde mit Hilfe von Rechtecksummen approximiert (366-8, Auszug 2), wodurch der F-Aspekt um die Grundvorstellungen Kumulation und Gesamteffekt ergänzt wird. Die Einbeziehung des Ausgangsreferenzkontextes impliziert die Genese des Riemann-Integrals.

Neben dem Viabilitätsprinzip konstruktivistischer Begriffsbildung, das die Überlegungen der Schülerinnen begleitete, zeigt sich in der Spezifikation auf einfache Funktionentypen das Prinzip der sukzessiven Exaktifizierung. Zudem konstruieren die Schülerinnen eigenständig mathematische Methoden. Damit erlangen sie allgemeine, bereichsunabhängige Problemlösefähigkeiten.

Die zeichnerische Lösung beinhaltete immer noch die Bezugnahme zu einer Produktsumme, bestehend aus endlich vielen Rechtecken. Diese wurde im Sinne der reflexiven Abstraktion konstruktivistischer Begriffsbildung auf unendlich viele Summanden erweitert.

Abbildung 10.7. Herleitung des Riemann-Integrals zur Fahrtenschreiberaufgabe von g1(1)



u ist die Anzahl der Teilintervalle.

$\frac{b}{u}$ ist die Länge der Teilintervalle.

Nun berechnen wir den Flächeninhalt der Balken oberhalb der Kurve:

Flächeninhalt eines Rechteckes : $A(a;b) = a \cdot b$

$\frac{b}{u} \cdot S(\frac{b}{u}) = \frac{b}{u} \cdot \frac{b^2}{u^2}$ ist der Flächeninhalt des 1. Balkens.

Der gesamte Flächeninhalt ergibt sich aus:

$\frac{b}{u} \cdot S(\frac{b}{u}) + \frac{b}{u} \cdot S(2 \cdot \frac{b}{u}) + \ldots + \frac{b}{u} \cdot S(u \cdot \frac{b}{u})$

$= \frac{b}{u} \cdot \frac{b^2}{u^2} + 2^2 \cdot \frac{b}{u} \cdot \frac{b^2}{u^2} + \ldots + u^2 \cdot \frac{b}{u} \cdot \frac{b^2}{u^2}$

$= \frac{b^3}{u^3} \cdot (1 + 2^2 + \ldots + u^2)$

klammern $\frac{b^3}{u^3}$ aus

Nun berechnen wir den Flächeninhalt der Balken unterhalb der Kurve:

$\frac{b}{u} \cdot S(0 \cdot \frac{b}{u}) = \frac{b}{u} \cdot 0 = 0$ ist der Flächeninhalt des 1. Balkens.

Aus Abbildung 10.7 wird deutlich, dass die Herleitung des Riemann-Integrals auf symbolischem Repräsentationsniveau zwar immer noch auf f mit $f(x) = x^2$ rekurrierte, hinsichtlich der Wahl der Intervallgrenzen jedoch schon abstrahiert wurde.

An dem Ausschnitt aus dem Forschungsheft lässt sich ebenfalls gut erkennen, wie die Schülerin um die Strukturierung ihrer Ergebnisse bemüht war.

Im weiteren Verlauf des Hefts bestimmte die Schülerin mit Hilfe von DERIVE den Grenzwert von Unter- und Obersummen und leitete eine allgemeine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts unter einem Graphen einer positiven stückweise stetigen Funktion her. Aus den Unterrichtsprotokollen sowie aus Gesprächen mit den Schülerinnen dieser Gruppe wird deutlich, dass sie die gerade genannten Bedingungen an die Funktion entsprechend definiert hatten. Der folgende Auszug aus dem Forschungsheft offenbart jedoch eine andere Situation.

Auszug 9 aus FH von g1(2)

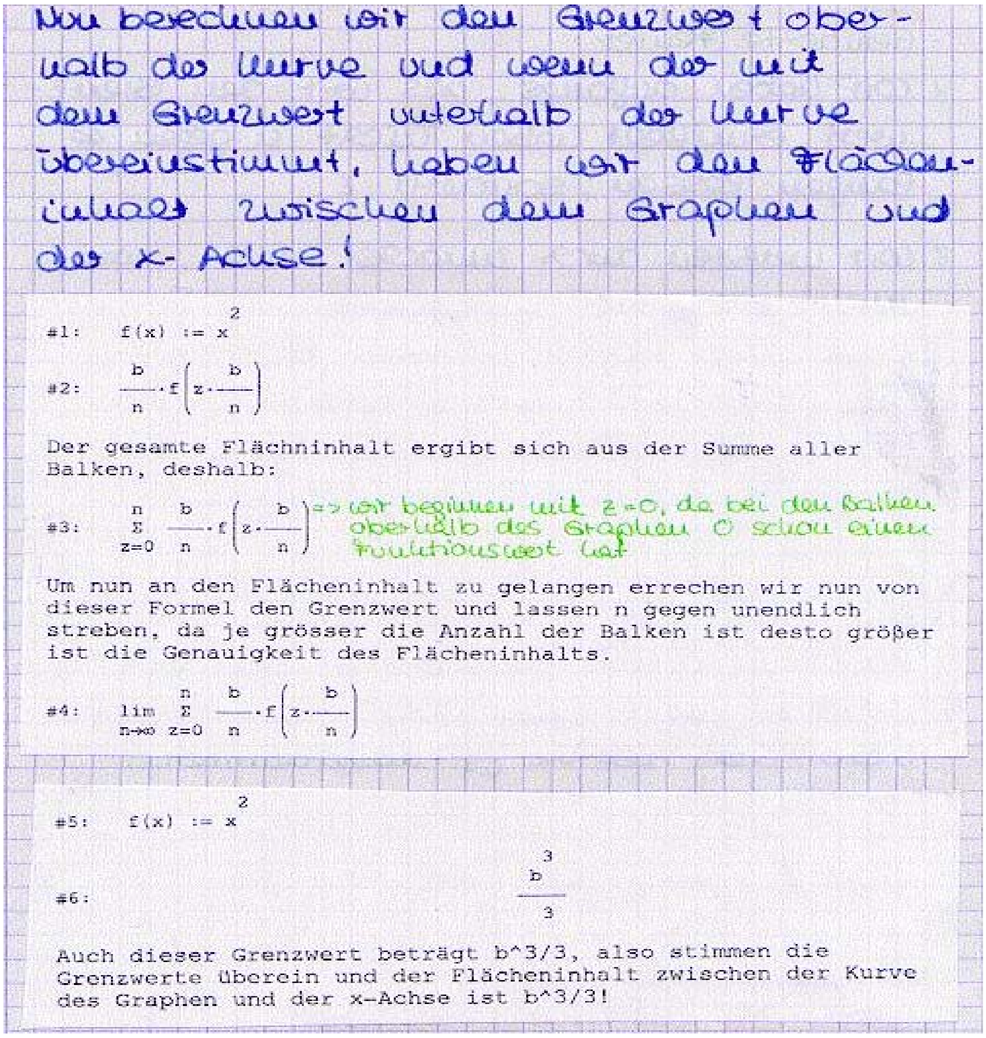
> "Integral":
>
> Man kann sich einem Integral entweder durch die Berechnung der Flächeninhalte A(a;b) oberhalb oder unterhalb einer steigenden Kurve einer Funktion f liegender Rechtecke, die alle die gleiche Breite haben, nähern. Je kleiner die Rechtecke sind, desto eine größere Anzahl von Rechtecken, kann man unter die Kurve einer Funktion f zeichnen und desto genauer wird das Ergebnis.
>
> unendlich viele Rechtecke => sehr genaues Ergebnis.

Die hier geforderte Bedingung an die Funktion besteht lediglich darin, dass die zugehörige Kurve „steigend“ (547) ist. Es ist zu vermuten, dass die Schülerin darunter „streng monoton wachsend“ versteht. Eine Vorstellung, die vermutlich aus der Beschäftigung mit dem positiven Parabelast entstanden ist. An dieser Stelle lässt sich sehr klar die Rolle der Lehrperson beschreiben. Sie muss mit einem an die Vorstellung der Schülerin anknüpfenden Beispiel die Wissenskonstruktion der Schülerin perturbieren. Die drei Probleme bieten hier reichhaltige Möglichkeiten. Wichtig ist jedoch auch, die Formulierung der Schülerin angemessen zu würdigen. Das bedeutet, dass man zu Gunsten der individuellen Formulierung und damit dem direkt mit der Definition verbundenen Verständnis seitens der Schülerin bei dem durch die reguläre Mathematik geprägten Exaktheitsanspruch Abstriche in Kauf nehmen muss. Bei dieser Definition der Schülerin trifft dies nicht auf die „steigende Kurve“ (547) zu, jedoch z.B. auf die Formulierung in den Zeilen 549-551. Diese Definition ist natürlich aus Sicht der regulären Mathematik nicht korrekt, sie drückt aber „richtiges“ Verständnis auf Seiten der singulären Position der Schülerin aus. Der Weg zur exakten Formulierung des Hergeleiteten ist neu für die Schülerin und muss erst gelernt werden. Die Lehrperson sollte im Rahmen des regulären Informierens in dieser Hinsicht vorbildlich agieren. Das bedeutet insbesondere, dass sie den Prozess zu einer konsistenten Definition an geeigneten Stellen exemplarisch vorzuführt, so dass die Schülerin im Verlaufe des weiteren Prozesses eine in sich schlüssige und vollständige Definition entwickeln kann.

Ein entscheidender Schritt zur Riemann-Integrierbarkeit ist die Forderung, dass Ober- *und* Untersummen gegen denselben Grenzwert konvergieren und nicht, dass mit einer von beiden das richtige Flächenmaß bestimmt werden kann. In Abbildung 10.7 ist erkennbar, dass dieser Schritt vollzogen wurde. Insofern wird hier deutlich, dass die meisten Definitionen und Behauptungen in einem Forschungsheft etwas Vorläufiges sind. Sie müssen ständig modifiziert werden.

An dem letzten Beispiel lässt sich ebenfalls erkennen, welche Stärken ein Computer-Algebra-System zur Unterstützung des Begriffsbildungsprozesses besitzt. Es kann sehr schnell gewünschte Sachverhalte veranschaulichen und entlastet an wichtigen Stellen des Begriffsbildungsprozesses von Routinearbeiten und aufwendigen Rechenaufgaben, so wie in diesem Beispiel bei der Summenberechnung von $\sum_1^n k^2$ und der Grenzwertbestimmung. Beide Schritte hätten viel Zeit gekostet und von dem Hauptinteresse abgelenkt.

Abbildung 10.8. Riemann-Integral



Nun berechnen wir den Grenzwert oberhalb der Kurve und wenn der mit dem Grenzwert unterhalb der Kurve übereinstimmt, haben wir den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse!

#1: $f(x) := x^2$

#2: $\frac{b}{n} \cdot f\left(z \cdot \frac{b}{n}\right)$

Der gesamte Flächninhalt ergibt sich aus der Summe aller Balken, deshalb:

#3: $\sum_{z=0}^{n} \frac{b}{n} \cdot f\left(z \cdot \frac{b}{n}\right)$ => wir beginnen mit z=0, da bei den Balken oberhalb des Graphen 0 schon einen Funktionswert hat

Um nun an den Flächeninhalt zu gelangen errechen wir nun von dieser Formel den Grenzwert und lassen n gegen unendlich streben, da je grösser die Anzahl der Balken ist desto größer ist die Genauigkeit des Flächeninhalts.

#4: $\lim_{n \to \infty} \sum_{z=0}^{n} \frac{b}{n} \cdot f\left(z \cdot \frac{b}{n}\right)$

#5: $f(x) := x^2$

#6: $\frac{b^3}{3}$

Auch dieser Grenzwert beträgt b^3/3, also stimmen die Grenzwerte überein und der Flächeninhalt zwischen der Kurve des Graphen und der x-Achse ist b^3/3!

Cauchy-Integral. Die Gruppe, die die Approximation durch Regelfunktionen entwickelte, versuchte, ebenso wie die gerade beschriebene Gruppe, einen Algorithmus zur Berechnung der Fläche zu erfinden. Während die erste der beiden Gruppen aufgrund ihres Ansatzes die Funktionswerte der Treppenfunktionen als Mittelwerte der Randwerte der Teilintervalle bestimmen konnte, wäre es für die Schülerinnen und Schüler, die das Riemann-Integral entwickelten, sehr schwierig, eine geeignete Berechnungsvorschrift zu bilden, da zur Bestimmung der Unter- und der Obersumme auf jedem Teilstück die Minimal- und Maximalwerte bestimmt werden müssten. Beide Gruppen wichen von ihren Wegen ab und entwickelten, gleich allen anderen Schülerinnen und Schülern, einen Algorithmus auf Basis der Links- bzw. Rechtssummen.

Ein solches Vorgehen ist in Abbildung 10.7 dargestellt. Hier wird deutlich, warum es für die Gruppe 1 „nützlicher" war, von „steigenden" Funktionen auszugehen. So war es ihnen möglich, Links- und Rechtssummen zu bestimmen, ohne dabei ihren Integralbegriff aufgeben zu müssen. Auf Basis der Spezifikation generierten sie eine allgemeine Theorie. Darin lässt sich eine typisch mathematische Arbeitsweise erkennen. Die Auflösung der Spezifikation, d.h. die korrekte Schlussweise vom Speziellen zum Allgemeinen, beherrschen die Schülerinnen und Schüler jedoch nur bruchstückhaft.

Auf Basis des Ausdruckes #4 in Abbildung 10.7 bestimmten die Schülerinnen und Schüler die Integrale und Stammfunktionen[115] und später auch die Differentations- und Integrationsregeln für andere Funktionsklassen.

Während diese Gruppe sowohl Rechts-, als auch Linkssummen berechneten, argumentierten andere Schülerinnen und Schüler, dass eine der beiden Summen, bzw. auch Summen, die einen beliebigen Funktionswert auf den Teilintervallen zur Berechnung verwenden, ausreichen würden, da die Grenzwerte dieser Summen bei stetigen Funktionen immer übereinstimmen.[116]

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass alle Schülerinnen und Schüler auf Grundlage dieses Problems den F-Aspekt und den A-Aspekt der Integralrechnung verstanden und das Cauchy-Integral selbsttätig generiert haben. Das Riemann-Integral und das Regel-Integral wurden jeweils nur von einzelnen Gruppen entwickelt, auf Grundlage der divergierenden und regulären Phasen des Unterrichts jedoch von allen Schülerinnen und Schüler als relevant für das Problem erkannt und verstanden. Kumulation und Gesamteffekt waren bei der Entwicklung aller Begriffe und Aspekte zentrale Grundvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern. Der M-Aspekt ist ebenfalls in die Bearbeitung in Form der Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeiten eingegangen, aber zunächst nicht als typischer Integralaspekt erkannt worden. Einzelne Schülerinnen und Schüler haben am Ende der Problembearbeitung auf Basis der Gesamtstrecke und des Gesamtzeitraumes die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt bestimmt und insofern auch eine für die Integralrechnung relevante Bedeutung des M-Aspektes kennen gelernt, jedoch haben sie dies nicht in die divergierende Phase eingebracht.

Zwei Schüler deuteten darüber hinaus den S-Aspekt, indem sie die Geschwindigkeit als Änderungsrate der Strecke und insofern die Strecke als Gesamteffekt der Geschwindigkeit interpretierten (vgl. z.B. Anhang A. Auszug 20). Dies ist zwar in der divergierenden Phase diskutiert worden, hat aber keinen Einlass in die Forschungshefte der anderen Schülerinnen und Schüler gefunden.

Diese Beobachtungen legen den Schluss nahe, dass bei Behandlung von ausschließlich stückweise stetigen Funktionen im Unterricht das Cauchy-Integral ein für das grundlegende Verständnis der Integralrechnung hinreichender Integralbegriff ist. Hinsichtlich der Abgrenzung gegenüber anderen Integralbegriffen sollten weitere Integralbegriffe heuristisch erfasst und in leistungsstarken Kursen gegebenenfalls tiefergehend thematisiert werden, doch in der Regel wird die Behandlung des Cauchy-Integrals für ein Verständnis der Grundzüge der Integralrechnung ausreichen.

[115] Vgl. z.B. den Forschungsheftauszüge 20-24 in Anhang A.

[116] Diese Aussage wurde im weiteren Verlauf der Unterrichtsreihe mit Hilfe der Ober- und Untersummen noch bewiesen. Der Versuch, Funktionen zu konstruieren, bei denen das Cauchy-Integral nicht ausreicht, führte später zu dem Begriff des uneigentlichen Integrals.

10.2.2 Problem zum Geschlechterwachstum - Kernideen und Problembearbeitung

Die zu Beginn der Problembearbeitung entwickelten Kernideen der Schülerinnen und Schüler orientierten sich im Wesentlichen an der vorgegebenen Aufgabenstellung: Welche Informationen lassen sich aus den Daten entnehmen und in welchen Zeitabschnitten sind die Mädchen größer als die Jungen? Dabei wurde die zweite Fragestellung deutlich favorisiert. Die Vorgabe einer solchen konkreten Fragestellung ist vermutlich der Grund, warum die meisten Schülerinnen und Schüler dieses Problem als erstes bearbeiteten. Darauf weisen die in den Forschungsheften notierten „Wissenslücken" zu den anderen Problemen hin, in denen vielfach eine fehlende Fragestellung in der Problemstellung beklagt wurde.

Die Kernidee, dass die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen die Zeitpunkte lokalisieren, an denen sich das Größenverhältnis ändert, wurde nur von wenigen Schülerinnen und Schülern schriftlich formuliert.[117] Die meisten Schülerinnen und Schüler orientierten sich an den Hypothesen, dass es nur *einen* solchen „Änderungszeitpunkt" gibt, und dass dieser sich mit Hilfe von sogenannten „Grundfunktionen", das sind Funktionen, die abgeleitet die gegebenen Wachstumsfunktionen ergeben, bestimmen lässt. Zu dieser Kernidee gelangten viele Schülerinnen und Schüler über eine während der Differentialrechnung bearbeitete Aufgabe, in der aus einer Größenfunktion mit Hilfe der Ableitung die Wachstumsfunktion bestimmt wurde.[118] Andere Schülerinnen und Schüler argumentierten auf Basis von Änderungsraten und kamen zu derselben Folgerung.

Zur Bestimmung der Stammfunktionen konzentrierten sich alle Gruppen erst einmal auf die erste ganzrationale Funktion bei den Mädchen und bestimmten durch das sogenannte „Aufleiten" die Stammfunktion.[119] Bei den anderen Funktionen hingegen waren die Bearbeitungen gruppenspezifisch sehr unterschiedlich. Zwei Gruppen entdeckten im CAS DERIVE die Operation „Integral"[120] und bestimmten so sehr schnell die zugehörigen Stammfunktionen. Diese wurden durch entsprechendes Differenzieren auf ihre Richtigkeit überprüft. Bei der zweiten Jungenfunktion, das ist die Funktion, deren Stammfunktion nicht durch einen geschlossenen Ausdruck darstellbar ist, resignierten viele Schülerinnen und Schüler, da der von DERIVE errechnete Ausdruck keinen Aussagewert für sie enthielt. Da die Funktion dennoch graphisch dargestellt werden konnte, wurde die anfängliche Resignation schnell überwunden.

Eine andere Gruppe versuchte im Sinne der Umkehrung des Differenzierens, eine Ableitungsregel für die zweite Mädchenfunktion zu entwickeln.[121] Dies gelang und führte zur Kettenregel der Differentialrechnung. Dieser Erfolg führte zu sehr viel Stolz bei den einzelnen Schülerinnen bzw. Schülern und einem erhöhten Arbeitseifer in der Gruppe. Ebenso wie bei der Kettenregel wurden alle anderen entwickelten Regeln[122] von den meisten Schülerinnen und Schülern frühzeitig in Form von Sätzen formuliert.

Die Schüler und Schülerinnen der letzten Gruppe, das ist die Mädchengruppe mit den größten Vorbehalten gegenüber dem Einsatz des Computers, bestimmten zuerst die

[117] Eine Gruppe führte eine Extremwertbestimmung für alle Funktionsgleichungen durch und stellte anschließend fest, dass die Ergebnisse nicht zur Beantwortung der Fragestellung beitrugen.
[118] Vgl. Mathewerkstatt den Abschnitt zur Differentialrechnung in HUßMANN (2000).
[119] Das Verfahren des „Aufleitens" war den Schülerinnen und Schülern noch nicht bekannt. Insofern stellt die Entwicklung dieses Begriffes eine eigenständige Leistung dar.
[120] Da das Thema zu Beginn der Unterrichtsreihe „Einführung in die Integralrechnung" genannt wurde, konnten die Schülerinnen und Schüler diese Verknüpfung herstellen.
[121] Bis zu diesem Zeitpunkt waren die Schülerinnen und Schüler die Produkt-, die Ketten- und die Quotientenregel noch nicht bekannt.
[122] Z.B. Faktor- und Summenregel.

Stammfunktionen aller gegebenen ganzrationalen Funktionen ohne Computernutzung. Bei der ersten Funktion eines anderen Typs bemühten sie sich zuerst ausgiebig um eine Lösung ohne Zuhilfenahme des Computers, stellten aber mit der Zeit fest, dass der Computereinsatz nützlich sein könnte und bestimmten die Stammfunktionen der anderen Funktionen mit seiner Unterstützung.

Daran anschließend stellten alle Gruppen die Stammfunktionen graphisch dar.[123] Nachdem die erste Phase allen Gruppen viel Selbstbestätigung hinsichtlich ihrer Qualitäten als Forscherinnen und Forscher bot, stellte das Ergebnis der graphischen Realisierung die Schülerinnen und Schüler vor zwei zentrale geistige Hindernisse[124]: Die Funktionsgraphen auf den Teilabschnitten stellen nicht einen zusammenhängenden Graphen dar und die Babys wären, nach dieser Darstellung, zum Zeitpunkt der Geburt 0 cm groß (vgl. Abbildung 10.9)

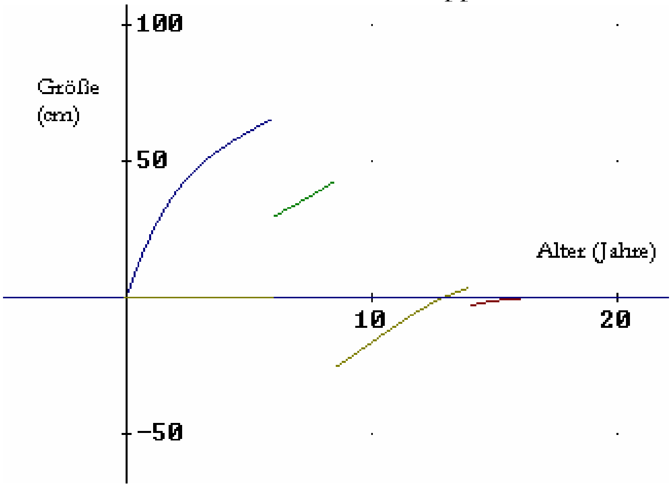


Abbildung 10.9. Graph der Stammfunktion auf den Teilabschnitten bei den Mädchen in g1(2)

In dieser Phase zeigten alle Schülerinnen und Schüler großes Durchhaltevermögen und eine hohe Frustrationstoleranz. Sie arbeiteten unermüdlich mit verschiedenen Strategien an der Beseitigung dieser Hindernisse.[125] Als neue Kernideen bekamen die Fragen nach der Größe der Kinder bei Geburt und nach einer stetigen Größenfunktion über den gesamten Zeitraum Orientierungs- und Motivierungsfunktion für die Schülerinnen und Schüler.

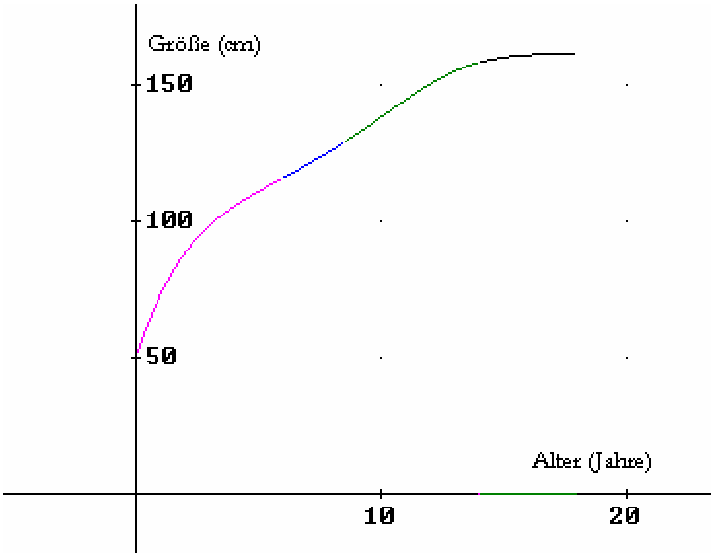
Überwunden wurden diese Hindernisse im Wesentlichen auf zwei Wegen: Der eine Weg führte über eine Internetrecherche zur Geburtsgröße. Die Recherche ergab Geburtsgrößen von durchschnittlich 50 cm. Dieser Wert wurde als Konstante an die erste Funktion angefügt und es stellte sich heraus, dass dies beim Differenzieren keine Auswirkungen auf die Wachstumsfunktion zeigt. Die Möglichkeit der Hinzufügung einer Konstante bei dem ersten Funktionsabschnitt implizierte das gleiche Vorgehen bei den anderen Teilfunktionen.

Die Schülerinnen und Schüler, die den anderen Weg beschritten, entdeckten erst den Zusammenhang, dass Konstanten beim Ableiten den Wert Null annehmen, und setzten daraufhin einen von ihnen geschätzten Wert als Geburtsgröße ein. [126]

Die Bestimmung der Konstanten bei den anderen Funktionen wurde einerseits durch Rechnung und andererseits durch Zoomen der jeweiligen Ausschnitte bestimmt (vgl. Abbildung 10.10).[127] Das erfolgreiche Handeln bei dieser Aufgabe erzeugte überwiegend große Freude und wirkte sich sichtbar auf das weitere Handeln aus.

[123] Das gilt ebenfalls für die zweite Jungenfunktion, die zwar nicht als geschlossener Ausdruck existiert, aber graphisch dargestellt werden kann.
[124] Vgl. Abschnitt 3.1.
[125] Dieser Einsatz ging oft damit einher, dass die Pausen während der Doppelstunden nicht genutzt wurden und einigen Schülerinnen und Schülern zuweilen auch die Beendigung der Arbeit nach der sechsten Stunde schwer fiel.
[126] In vielen Fällen wurde dieser Zusammenhang auf Grund der Abbildung 10.9 entdeckt, da die Teilstücke so verlaufen als würden sie zusammengehören.
[127] Eine Gruppe bestimmte die Konstanten durch Ablesen, berechnete die Werte im Anschluss an die Präsentationsphasen jedoch noch einmal.

Abbildung 10.10. Stammfunktion der Mädchenfunktion in g1(2)



Doch die Schülerinnen und Schüler mussten sich bald mit dem nächsten Hindernis auseinandersetzen: Der Schnittpunkt der zweiten Jungen- mit der dritten Mädchenfunktion konnte mit Hilfe von DERIVE nicht bestimmt werden, da die Stammfunktion der zweiten Jungenfunktion nicht explizit angegeben werden konnte. Einer Gruppe gelang eine approximative Bestimmung des Schnittpunktes, sie verstanden den zugehörigen Algorithmus jedoch nicht (Anhang A. Auszug 18). An dieser Stelle wechselten alle Gruppen zur Bearbeitung eines anderen Problems. Zuvor verallgemeinerten viele Schülerinnen und Schüler ihre ersten Ergebnisse in Form von mathematischen Definitionen und Sätzen.

Im Anschluss an die Bearbeitung des Fahrtenschreiberproblems, eröffnete die Deutung des Integrals als Grenzwert der Linkssummen, d.h. als Cauchy-Integral, den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, den Größenzuwachs, der durch die zweite Jungenfunktion gegeben ist, approximativ zu bestimmen und somit das Problem des Geschlechterwachstums in diesem Altersabschnitt zu lösen. Der Altersbereich über 18 Jahren (vgl. HUßMANN 2000) warf nur für fünf Schülerinnen und Schüler relevante Fragen auf, die sie in einer kurzen Darstellung bearbeiteten, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

10.2.2.1 Aspekte und Begriffe der Integralrechnung – Teil 2

Das Stammfunktionsintegral, S-Aspekt und 2. Hauptsatz. Das Stammfunktionsintegral, der S-Aspekt und der zweite Teil des Hauptsatzes hängen inhaltlich sehr stark zusammen. Alle drei Begriffe rekurrieren auf die Existenz einer Stammfunktion. Während das Stammfunktionsintegral die Existenz einer Stammfunktion zur Definition eines entsprechenden Integralbegriffs voraussetzt[128], erklärt der Hauptsatz die Beziehung zwischen der durch Kumulation gewonnenen Funktion und der Stammfunktion, und der S-Aspekt beinhaltet die Rekonstruktion einer Stammfunktion aus einer gegebenen Randfunktion, die als Ableitungsfunktion verstanden wird.

Sowohl die Stammfunktionsintegrierbarkeit, als auch der S-Aspekt wurden von den Schülerinnen und Schülern während und nach der Bearbeitung des Problems zum Geschlechterwachstum entwickelt. Da im Verlauf der Bearbeitung auch einige Bezüge zum Problem des Fahrtenschreibers entwickelt wurden, werden diese im Anschluss kurz dargestellt.

[128] Vgl. z.B. das Stammfunktionsintegral nach PICKERT in TIETZE et. al. (2000), S. 283.

Auszug 10 aus FH von g3(2)

Im Vergleich mit der Aufgabe "Sonnenblumen" liegt hier als Wachstumsgraph die Ableitung vor. Wenn wir die dazugehörige Ausgangs- oder Originalfunktion finden, die dann den Größenverlauf beschreibt, ließe sich die Größe für ein bestimmtes Alter errechnen.

Vergleich mit "Sonnenblumen":
Haben: Funktion, die Größe beschreibt
Brauchen: Wachstumsverlauf als Funktion
Bilden: 1. Ableitung der Größenfunktion

Daraus folgern wir die [Umkehrung für Geschlechterwachstum: #blau unterstrichen#]
Haben: Wachstumsverlauf entspr. 1. Ableitung
Brauchen: Größenfunktion
d.h. wir müssen unsere gegebene Funktion (als 1. Ableitung) rückbilden, um die Größenfunktion zu erhalten.

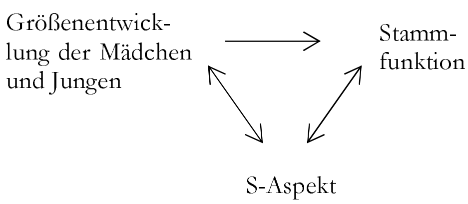
Originalfunkion (siehe Definitionen)

Wir führen die Ableitungsfunktion auf ihre Originalfunktion zurück.

Der Auszug 10 aus dem Forschungsheft einer Schülerin der Gruppe 3 beschreibt das erste Auftreten des S-Aspektes. Der Referenzkontext war die Frage nach der Körpergröße. Da nach der „Sonnenblumenaufgabe" Wachstumsfunktionen Ableitungen sind, müssen die entsprechenden „Originalfunktionen" die jeweiligen Größen beschreiben (288-93). Das heißt, aus der gegebenen Ableitung musste eine Stammfunktion rekonstruiert werden. Die noch zu erwartende Perturbation zwischen Modell und Referenzkontext auf Grund der Unstetigkeit der Größenfunktionen war zu diesem Zeitpunkt und für die viable Generierung des S-Aspektes bedeutungslos.

Anschließend (295-306) entwickelte die Schülerin ein Schema, das ihr einen direkten Vergleich des Integrierens und des Differenzierens erlaubte. Diese Strukturierung setzte sich im weiteren Verlauf des Forschungshefts fort und war insbesondere bei der Entwicklung von Integrationsregeln und den zugehörigen Beweisen von großem Nutzen für die Schülerin. Diese Art der Verknüpfung mit der Differentialrechnung weist auf eine vorrangig prädikative kognitive Struktur bei der Schülerin hin (vgl. Abschnitt 3.3).

Epistemologisches Dreieck 7



Die Beschreibung der Erzeugung der Stammfunktion zeigt zwar durch die Schrittfolge Haben-Brauchen-Bilden funktionale Strukturen, doch sind diese primär relational konstituiert.

Diese Betonung der Beziehung von Differential- und Integralrechnung wurde in erster Linie von Mädchen durchgeführt[129] und zeigt sich ebenfalls im nächsten Auszug aus dem Forschungsheft dieser Schülerin.

Auszug 11 aus FH von g3(2)

[Aha-Erlebnis: #blau unterstrichen#] Eine Ableitung
hat unendlich viele Originalfunktionen, #
eine Originalfunktion hat aber
nur eine Ableitung.

[Beispiel zu dieser Behauptung: #unterstrichen#]
Nehmen wir eine Funktion

F(x):=a*x^4+ b*x^3+c*x^2+d*x+e

Die Ableitung würde lauten

d(a*x^4+ b*x^3+c*x^2+d*x+e)/dx

4*a*x^3+3*b*x^2+2*c*x+d

Die Konstante verschwindet also in der Ableitung.
Wenn man nur die Ableitung gegeben hat, ist es
nicht möglich, genau festzustellen, welchen Wert
diese Konstante e eingenommen hat.
Deshalb können wir für e jeden beliebigen Wert
einsetzen.

Am Ende der Problembearbeitung fasste die Schülerin ihre neu gewonnene Erkenntnis in einem Aha-Erlebnis zusammen und formulierte dieses im Verlauf des Forschungshefts zu einem Satz.

Sie erkannte einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung und war zu jenem Zeitpunkt sogar in der Lage, ihre Behauptung mit einem abstrakten Beispiel zu belegen.[130] Dieses Beispiel weist ebenso wie das Aha-Erlebnis auf die schon erwähnte prädikative Struktur hin (415-29). Die Vorstellung, dass man alle Stammfunktionen aus einer Stammfunktion durch Addition mit einer Konstanten erhalten kann, war zu jenem Zeitpunkt ebenfalls schon entwickelt (435-6).

Im weiteren Verlauf des Forschungshefts definierte die Schülerin, was sie unter einer Originalfunktion versteht (vgl. Auszug 12). Diese Definition erzeugte sie im Forschungsprozess sehr früh, notierte sie jedoch erst nach der Bearbeitung verschiedener Fragestellungen. Darin wird das Prinzip der reflexiven Abstraktion deutlich. Erst die Loslösung von der konkreten Aufgabenstellung, dem Abziehen aller konkreten Eigenschaften gestattet auf einer Metaebene das Denken in abstrakten Begriffen. Ein solcher Schritt kann nicht direkt im Anschluss an die Erfindung eines Begriffs erfolgen.

Auszug 12 aus FH von g3(2)

[Definition #doppelt rot unterstrichen und
rot geschrieben#]
[Integralrechnung #rot unterstrichen und
rot geschrieben#]
Zu einer gegebenen Funktion f ist eine
Funktion Of zu bestimmen, deren Ableitung
gleich f ist. Of wäre dann eine
[Originalfunktion #grün unterstrichen#]von f.

[Beipiel: #doppelt blau unterstrichen#]

[129] Bei dem Beweis der partiellen Integration beispielsweise, der auf den Beweis der Kettenregel rückführbar ist, zeigten die Jungen deutlich größere Schwierigkeiten als die Mädchen, die durch die von ihnen erzeugte Relation sehr schnell konsistente Lösungen erzeugten.

[130] Viele Schüler und Schülerinnen haben an einer dieser Stelle eine konkrete Funktion als Beispiel verwendet.

Die Tatsache, dass es unendliche viele solcher Originalfunktionen gibt, war der Schülerin bekanntlich bewusst. Sie drückte es mit dem Artikel „eine“ (708, 10) deutlich aus. In den nächsten Zeilen exemplifizierte sie diesen Zusammenhang (713).

Auf Grundlage dieser Definition erzeugte sie ihre erste Definition von Integrierbarkeit:

Auszug 13 aus FH von g3(2)

[Definition # schwarz geschrieben #]
Eine Funktion f ist dann
[integrierbar #schwarz unterstrichen#],
wenn ihre Originalfunktion existiert und
diese ableitbar ist, so dass die
Ableitung von Of wieder f ergibt.

[integrierbar #doppelt rot unterstrichen#] =
Eine Funktion f (als Ableitung) wieder auf
ihre Originalfunktion Of zurückleiten
=>> [integrierbar #rot unterstrichen#]
auch: [zuleiten #rot unterstrichen#] (ableiten)

Es handelt sich hier um eine Definition von Integrierbarkeit, die sich auch als Stammfunktionsintegrierbarkeit[131] bezeichnen lässt, da sie die Existenz einer Stammfunktion voraussetzt. Entstanden ist diese Definition als Deutung des Referenzkontextes der Wachstumsfunktionen der Jungen und Mädchen, mit Ausnahme der zweiten Jungenfunktion. Die zweite Jungenfunktion ist hiernach nicht integrierbar. Das macht zu einem späteren Zeitpunkt eine Modifikation des Modells notwendig und trägt zu einer Abgrenzung der Begriffe bei. Zu dieser Zeit existierte die zweite Jungenfunktion im Gesichtsfeld der Schülerin[132] noch nicht. Da der Computer in der Lage ist, die Funktion graphisch darzustellen, erzeugte dies auch keine ernstzunehmende Perturbation.[133]

Epistemologisches Dreieck 8

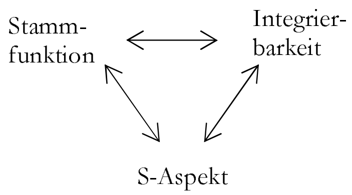


Tabelle 10-2. Stammfunktionsintegrierbarkeit

Referenzkontext/ Kernidee	Beziehung	Symbol/Modell
Größenentwicklung der Mädchen und Jungen		Stammfunktion
Stammfunktion		Integrierbarkeit

Auf Basis der epistemologischen Dreiecke 7 und 8 lässt sich der Generierungsprozess des Integrierbarkeitsbegriffs als eine Beziehung zwischen der Kernidee, die Größenentwicklung der Mädchen und Jungen darzustellen, den dazu notwendigen Stammfunktionen und einem Integrierbarkeitsbegriff veranschaulichen. Die erste Beziehung ist einseitig und problemorientiert. Die zweite Beziehung leitet ihre Notwendigkeit nicht aus dem Problem ab, sondern entsteht aus dem Bedürfnis, eine mathematische Theorie zu entwickeln.

Hier tritt eine der Stärken dieser Unterrichtskonzeption, insbesondere der Forschungshefte, deutlich zu Tage. Die Schülerin kann zu einem von ihr selbst gewählten Zeitpunkt eine

[131] Ein Stammfunktionsintegral wurde nur von wenigen Schülerinnen und Schülern definiert.
[132] Dieser Schritt wurde von allen Schülerinnen und Schülern aus dem LKUC ähnlich vollzogen.
[133] Der zweite Teil der Definition (761-5) rekurrierte erneut auf den Zusammenhang von Integration und Differentation.

selbst formulierte Definition mit einem zugehörigen Beispiel niederschreiben. Das erleichtert den Zugang zu diesem Bereich und schafft eine selbstorganisierte Sequenzierung des Stoffes. Wie wichtig dies ist, zeigt der weitere Verlauf des Forschungshefts des Mädchens.

Nachdem der Kurs in der divergierenden Phase die gemeinsam zu verwendende Sprache ausgehandelt hatte, in diesem Fall den Begriff *Grundfunktion*, schrieb die Schülerin in der ersten Zeit danach weiterhin den Namen *Originalfunktion* in ihr Forschungsheft, aber in Klammern dahinter *Grundfunktion* (vgl. Auszug 25), bis etwas später nur noch der Name *Grundfunktion* erscheint (vgl. Auszug 26). Daran ist zweierlei zu erkennen: 1. Das Medium des „Sichverständlichmachens" und des Verstehens des „Sichverständlichmachens" der anderen ist die Sprache und damit sehr wichtig für den Begriffsbildungs*prozess*. 2. Die Loslösung von selbsterfundenen Namen lässt sich nicht in einem Schritt vollziehen. Sie erfordert die Trennung von der eigenen Erfindung zu Gunsten einer Verständigung im sozialen Kontext. Damit wird nicht nur der Name, sondern auch die Erfindung Teil des sozialen Kontextes, nicht aber die mit der Begriffsentwicklung verbundene prozessuale Vorstellung des Begriffs. Dies macht die nachrangige Bedeutung des Namens als Teil der zu einem Begriff zugehörigen Vorstellungen noch einmal deutlich (vgl. Kapitel 3). Für die Stabilisierung des Begriffs ist die Verknüpfung mit dem Handeln, mit den jeweiligen Problemen und Beispielen, die motorische und visuelle Repräsentation des Begriffes ermöglichen, wichtig.

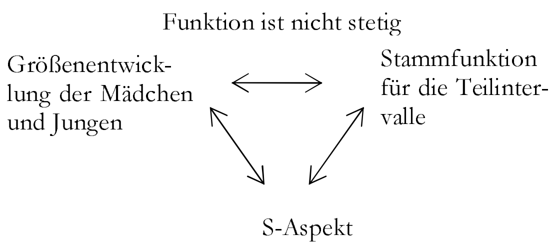
Die Erstellung der Stammfunktionen wurde durch die oben aufgeführten Hindernisse und deren Bewältigung begleitet. Der Auszug 14 aus einem Forschungsheft der Jungengruppe behandelt die Bearbeitung der Perturbation durch die Unstetigkeit der beiden Größenfunktionen bei den Mädchen und den Jungen.

Auszug 14 aus FH von g1(2)

173: Da die Teilfunktionen nicht
174: miteinander verknüpft sind,
175: haben wir die folgende Überlegung zur
176: Bestimmung der Konstanten d
177: angestellt:
178: Setzt man den Wert am Ende eines
179: Teilabschnittes in die Grundfunktion
180: Gf2 ein, so will man die Körpergröße f
181: zu diesem Zeitpunkt errechnen. Setzt
182: man den ersten Wert des Abschnittes
183: in die Grundfunktion Gf2 ein, will
184: man die Größe zu diesem Zeitpunkt
185: wissen.
186: Die gesuchte Grundfunktion für den
187: ganzen Abschnitt muss also die
188: Größenänderung in diesem Abschnitt
189: angeben.

Das Epistemologische Dreieck 9 beschreibt die Situation zu Beginn dieses Ausschnitts. Die im Epistemologische Dreieck 7 noch nicht aufgetretene Perturbation ist jetzt erkennbar.

Epistemologisches Dreieck 9



Zur Lösung der Problems zum Geschlechterwachstum bestimmten die Schüler der ersten Gruppe die Stammfunktionen mit Hilfe von DERIVE. Sie erkannten, dass die Graphen der so bestimmen Größenfunktionen nicht „miteinander verknüpft" (173,4) sind. Das Hindernis der unstetigen Höhenfunktion und die dadurch entstehende problematische Deutung des Referenzkontextes, erfordert eine Modifikation des Modells. Die Konstante muss bestimmt werden (176).

Der eindeutige Teil der
Grundfunktion gibt aber einen
anderen Wert an, wenn man den
ersten Wert des Abschnittes einsetzt.
Deswegen:
Wir benötigen erst einmal eine
Grundfunktion, die für den Anfang
des Intervalls immer Null ergibt,
das ist der eindeutige Teil der
Grundfunktion Gf2(x)-Gf2(6).
Dann addieren wir den Wert der
letzten Grundfunktion Gf1 am Ende
des letzten Teilabschnittes dazu:
Gf2(x)-Gf2(6)+Gf1(6)
So haben wir dann die gesuchte
Konstante d.

Allgemein muss immer gelten:

#Math. Formel: vgl. Grafik 1#

Zielperspektive für das neue Modell war die Erfüllung der folgenden Eigenschaft: Die Größnfunktion gibt an den Randstellen des Teilabschnitts die tatsächliche Größe an (178 -85). Deswegen, so argumentierten die Schüler, muss die Differenz der Randwerte der Stammfunktion in diesem Abschnitt die Veränderung der Größe angeben (186-189, 209):

Epistemologisches Dreieck 10

Körpergrößen an den Verknüpfungspunkten ⟶ Gf(b)-Gf(a) ist die Größenänderung im Intervall [a,b]

2. Hauptsatz

Grafik 1

$$\int_a^b f(x)dx = Gf(b) - Gf(a)$$

Die Argumentation ist schlüssig, sie lenkt aber scheinbar von dem eigentlichen Interesse ab. Gesucht war die Integralfunktion $I_d(x) = \int_d^x w$ zur Bestimmung des Schnittpunktes der beiden Größenfunktionen, also insbesondere die Konstante *d*, die eine Deutung der Integralfunktion als Größenfunktion ermöglicht. Generiert wurde jedoch von den Schülern der 2. Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung. Die Schüler scheinen an dieser Stelle nicht zu bemerken, dass die Differenz der Randwerte unabhängig von der Konstanten immer die Größenveränderung angibt. Die Begründung, dass die von ihnen bestimmte Stammfunktion nicht den gewünschten Wert an der Stelle 6 angibt (190-3), deutet darauf hin. An dieser Stelle ist die Argumentation nicht mehr konsistent, obwohl die Schüler im Weiteren sowohl den ersten Hauptsatz erfunden, als auch die Konstanten korrekt bestimmt haben.

Eine andere Interpretation dieses Ausschnittes bestünde darin, die Argumentation in den Zeilen 186-9 nur als Einschub zu betrachten. In diesem Falle läge an der Stelle eine schlüssige Argumentation vor. Dann müssten jedoch auch die Zeilen 207-9 isoliert interpretiert werden, da diese argumentativ an die Zeilen 186-9 anschließen. Bei beiden Interpretationen kann davon ausgegangen werden, dass zumindest eine Vermengung zweier unterschiedlicher Begriffe vorliegt.

Folgen wir der ersten Interpretation übertrugen die Schüler offensichtlich die zum ersten Hauptsatz zugehörige Vorstellung der Differenzenbildung auf die Differenzenbildung Gf1(6)-Gf2(6) (203) zur Bestimmung der Konstanten *d*.

Dies ist eine Situation, in der die Lehrperson *nicht* durch zusätzliche Perturbationen den Begriffsbildungsprozess der Schüler stören sollte. Denn da die Schüler innerhalb der beiden unterschiedlichen Begriffsbildungsprozesse logisch konsistent argumentierten, was auf ein Verstehen hindeutet, ist anzunehmen, dass die sprachliche Realisierung diese proble-

Epistemologisches Dreieck 11

Funktionen sind nicht stetig

Stammfunktion für die Teilintervalle ⟷ Gf1(6)-Gf2(6) =d

S-Aspekt & Stetigkeit

matische Deutung produzierte. Die Lehrperson sollte den weiteren Begriffsbildungsprozess verfolgen, und je nach Interpretation des Verständnisses auf Seiten der Schüler diese zu einem späteren Zeitpunkt durch ein geeignetes Beispiel perturbieren bzw. sie die logische Schlüssigkeit ihrer Argumentation überprüfen lassen.

An diesem Beispiel zeigt sich ein wichtiger Unterschied zum klassischem Unterricht. In der Lernumgebung von KLIP hat die Lehrperson mehr Zeit als im üblichen Unterrichtsgespräch, die Begriffsbildung der einzelnen Schülerin bzw. des einzelnen Schülers zu beobachten, zu verstehen und vor allen Dingen sich geeignete Maßnahmen der Unterstützung zu überlegen. Im Unterrichtsgespräch hingegen müssen oftmals aus Mangel an Zeit individuelle Konstruktionen als falsch klassifiziert werden, ohne dabei auf den Grund dieser Beurteilung einzugehen.

In dem gerade beschriebenen Fall erkannten die Schüler ihren Fehlschluss selbst. Nach Bearbeitung aller drei Aufgaben in der dritten Phase der Begriffsbildung[134], der Phase, die wesentlich dem Prinzip der reflexiven Abstraktion folgt, verglichen die Schüler die Ergebnisse aller drei Aufgaben mit ihren Deutungen (vgl. Auszug 15).

Auszug 15 aus FH von g1(2)

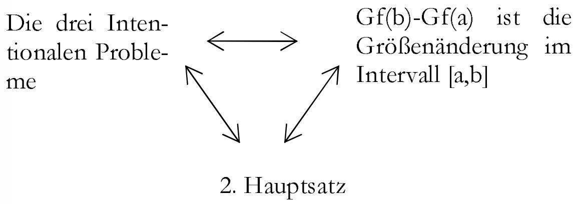
Bei der Geschlechteraufgabe hatten
wir gesagt, dass
#Math. Formel: vgl. Grafik 2#
gelten muss.
Das wird jetzt noch logischer.
Wenn man nämlich die Grundfunktion
in einem Intervall als die
Fläche unter dem Graphen in
diesem Bereich sieht. Dann bestimmt
die Fläche genau die Strecke, die
in diesem Bereich zu der schon
gefahrenen Strecke dazukommt.
Oder bei der Geschlechteraufgabe
die Höhe, die in der Zeit zu der
schon vorhandenen Höhe dazukommt.
Oder bei der Wasseraufgabe das
Wasser, dass in der Zeit
zusätzlich verbraucht oder
produziert wird.
SUPER!!
Das waren jetzt ganz viele
AHA-Erlebnisse.

Grafik 2

$$\int_a^b f(x)dx = (Gf(b)+c)-(Gf(a)+c) = Gf(b)-Gf(a)$$

Der Referenzkontext der Schüler wurde auf die Kernschemata zu allen Intentionalen Problemen erweitert. Zur Deutung des Geschlechterwachstums wurde nicht mehr ein Modell herangezogen, sondern das schon generierte Modell diente in Wechselwirkung mit allen Problemen als Modell zur Deutung des Referenzkontextes.

Epistemologisches Dreieck 12



Durch die Hinzuziehung des F-Aspektes (400 -3), der auf Grundlage der Fahrtenschreiberaufgabe entwickelt wurde, gelang den Schülern ein wichtiger Abstraktionsschritt: Die Interpretation des Modells in Relation mit dem Referenzkontext aller drei Probleme. Die Fläche unter dem Funktionsgraphen entspricht dem Zuwachs von Strecke, dem Zuwachs von Körpergröße und dem Zuwachs bzw. Abnahme von Wasser (403-13). Der F-Aspekt wurde so in Beziehung zur Stammfunktion gesetzt und diese Beziehung wurde durch den zweiten Teil des Hauptsatzes erklärt (vgl. Grafik 2). Das ist ein hervorragendes Ergebnis, wenn man sich in Erinnerung ruft, dass dies ein Produkt eigenständig konstruierter Mathematik ist. Zudem lässt

[134] Vgl. Abschnitt 1.3. Die Präsentationsphase durch die Schülerinnen ist schon beendet.

diese Weise der Abstraktion auf prädikative kognitive Strukturen schließen, da hier zum einen vom Besonderen aufs Allgemeine geschlossen wird und zum anderen Relationen zwischen verschiedenen Eigenschaften erkannt werden. Dies rührt natürlich wesentlich von der Resonanz zwischen der Notwendigkeit der Abstraktion und den kognitiven Strukturen. Somit wird hier eine Möglichkeit sichtbar, geschlechtsunabhängig prädikatives Denken zu unterstützen, ohne vorhandene funktionale Strukturen dadurch zu beschneiden.

Die Bezeichnung „Grundfunktion in einem Intervall" (400-1) ist aus Sicht der regulären Mathematik nicht korrekt, aber der Schüler hatte bis dahin noch nicht den Begriff Integral mit Sinn gefüllt bzw. auch keinen anderen Begriff hierfür entwickelt.

Die Bedeutung der Umformulierung der Gleichung in Grafik 1 zur Gleichung in Grafik 2 für den Schüler macht die folgende Bemerkung auf derselben Seite des Forschungshefts erkennbar: „Der eindeutige Teil der Grundfunktion kann mit jeder beliebigen Konstante erweitert werden, die Differenz Gf(b)-Gf(a) bleibt immer gleich, d.h. der Zuwachs bleibt immer gleich." Hier wurde die Fehldeutung im Auszug 14 revidiert. Die Lehrperson sollte dieses Ergebnis nutzen, den Schüler auf die entsprechende Stelle im Forschungsheft aufmerksam zu machen.

Im Folgenden wird der Begriffsbildungsprozess noch einmal schematisch dargestellt.

Tabelle 10-3. Bildung des S-Aspektes

Referenzkontext/Kernidee	Beziehung	Symbol/Modell
Größenentwicklung der Mädchen und Jungen	⟶	Stammfunktion
Stammfunktion	Perturbation ⟶	Bestimmung der Konstanten
Bestimmung der Konstanten	⟶	Gf1(6)-Gf2(6)
Gf1(6)-Gf2(6)	Konstruktion ⟶	Bestimmung der Konstanten
Bestimmung der Konstanten	Konstruktion ⟶	Stammfunktion
Stammfunktion	Konstruktion ⟶	Größenentwicklung der Mädchen und Jungen

Tabelle 10-4. Entwicklung des zweiten Teil des Hauptsatzes

Referenzkontext/Kernidee	Beziehung	Symbol/Modell
Größenentwicklung der Mädchen und Jungen	⟶	Stammfunktion
Stammfunktion	Perturbation ⟶	Gf(b)-Gf(a) beschreibt Größenänderung in [a;b]
Gf(b)-Gf(a) beschreibt Größenänderung in [a;b]	⟷	Größenentwicklung Streckenbestimmung Wasserverbrauch

In beiden Prozessen wird das Prinzip der sukzessiven Exaktifizierung ersichtlich. Unter der Zielperspektive des ersten Referenzkontextes und der entstehenden Perturbationen werden bei jedem Exaktifizierungsschritt die Symbole und Modelle zur Deutung selbst Objekte weiterer Deutungen, die zur Konstruktion modifizierter und neuer Modelle anregen. Das Spannungsfeld des Komplementaritätsprinzips trägt wesentlich zur Herstellung eines viablen Begriffs, des Stammfunktionsaspekts, bei. Mit diesem lässt sich das realitätsorientierte Problem deuten und das Kernschema kapseln. Insofern entsprechen die verwendeten Begriffe, Referenzkontexte und Modelle in der aufgezeigten Struktur einem Kernschema.

Im ersten Fall haben wir einen sehr funktional geprägten Begriffsbildungsprozess (vgl. Tabelle 10-3). Das erkennt man insbesondere an der Weiterführung dieses Prozesses. Durch die Konstruktion der Modelle wird die Ebene des Ausgangskontextes Schritt für Schritt „zurück“ erschlossen. Der zweite Prozess aktiviert hingegen aufgrund seiner problemübergreifenden Strukturen bzw. aufgrund des Abstraktionsprinzips der Begriffsbildung eher prädikative kognitive Strukturen (vgl. Tabelle 10-4). Der so entwickelte Begriff, der zweite Teil des Hauptsatzes, wird genutzt um auch die anderen übergeordneten Referenzkontexte zu deuten und kann so in die diesen Problemen zugehörigen Kernschemata integriert werden bzw. die Generierung eines neuen abstrahierten Kernschema unterstützen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass auf Anregung durch dieses Problems von allen Schülerinnen und Schülern Kernschemata entwickelt wurden, die die Generierung des S-Aspektes und der Stammfunktionsintegrierbarkeit ermöglichten. Durch die Verknüpfung mit dem Fahrtenschreiber-Problem haben zudem alle Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen Kumulation, Gesamteffekt, S-Aspekt und F-Aspekt im Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung inhaltlich und formal verbunden. Dadurch wurde zudem der F-Aspekt gefestigt, da eine weitere inhaltliche Deutungsmöglichkeit bereitgestellt wurde. Jede Schülerin bzw. jeder Schüler hat die Uneindeutigkeit der Stammfunktion entdeckt und erkannt, dass zwei beliebige Stammfunktionen zu einer gegebenen Funktion sich nur durch eine Konstante unterscheiden. Einige Schülerinnen und Schüler haben diesen Satz auch bewiesen.

Hinsichtlich des Integralbegriffs entwickelten die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Integralbegriffe für unterschiedliche Problemanforderungen und Funktionenklassen. Insbesondere die zweite Jungenfunktion machte allen Schülerinnen und Schülern deutlich, dass die Stammfunktionsintegrierbarkeit an dieser Stelle nicht mehr ausreicht, sondern das Cauchy-Integral wesentlich bessere Dienste leistet. Damit ist der Modellierungscharakter von mathematischer Arbeit in besonderer Weise hervorgetreten. Die Schülerinnen und Schüler erkannten aber auch, dass hinsichtlich der Entwicklung von Rechenregeln der Zusammenhang mit der Differentialrechnung einige Vereinfachungen bietet. Viele der Schülerinnen und Schüler versuchten am Ende dieser Phase Funktionen zu finden, bei denen auch das Cauchy-Integral bzw. das Riemann-Integral an seine Grenzen stößt.

10.2.3 Problem zum Wasserverbrauch in Bochum - Kernideen und Problembearbeitung

Die Wasserverbrauchsaufgabe wurde von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet, jedoch nur von einem Drittel der Schüler und Schülerinnen in ihr Forschungsheft eingetragen. Deswegen gehe ich nur kurz auf die Problembearbeitung ein.

Große Schwierigkeiten bei diesem ersten Problem bereitete erwartungsgemäß die sehr offene Problemstellung (vgl. Kapitel 8.1.1). Die Hemmschwelle, das Problem anzugehen, war sehr groß. Die Jungen taten sich dabei wesentlich leichter als die Mädchen. Eine sinnvolle Erklärung für dieses Verhalten kann auf Grundlage der vorliegenden Informationen nicht gegeben werden.

Die am Häufigsten entwickelten Kernideen bei den Schülerinnen und Schülern waren die Interpretation negativer Verbrauchswerte und die übergreifende Frage nach der optimalen Nutzung des Wasserwerks. Die Auseinandersetzung mit den negativen Verbrauchswerten war sehr produktiv hinsichtlich der Begriffsabgrenzung gegenüber der Vorstellung ein Integral nur als Fläche aufzufassen.

Die optimale Planung hinsichtlich der Nutzung des Wasserwerks konnte den Betreiberinnen und Betreibern nicht bescheinigt werden. Dazu wählten die Schülerinnen und Schüler zwei Wege. Zum einen verstanden sie die angegebenen Werte als stündliche Durchschnittswerte und errechneten durch Mittelwertbildung den durchschnittlichen Verbrauch für den ganzen Tag. Zum anderen interpretierten sie die Werte als Momentanwerte zu den jeweiligen Zeitpunkten und modellierten den Verbrauch mit Hilfe von linearen Funktionen.

Die Schülerinnen und Schüler, die dieses Problem als erstes bearbeiteten, schlossen an dieser Stelle die Aufgabenbearbeitung ab. Die anderen Schülerinnen und Schüler nutzten die Bearbeitung dieses Problems zur Anwendung der in den anderen Problemen entwickelten Begriffe.

10.2.3.1 Aspekte und Begriffe der Integralrechnung – Teil 3

Der M-Aspekt und der F-Aspekt. Auf Grundlage dieses Problems wurde im weiteren Verlauf des Unterrichts von vielen Schülerinnen und Schülern der Mittelwertsatz der Integralrechnung generiert.

Der M-Aspekt war zum Zeitpunkt der Aufgabenbearbeitung jedoch nicht ausgeprägt vorhanden. Die Ausbildung des F-Aspektes wurde durch dieses Problem im besonderem Maße gefördert. Nach der erfolgreichen Bearbeitung des Hindernisses durch die negativen Wasserverbrauchswerte, hatten die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung orientierter Flächen entwickelt.

10.2.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

10.2.4.1 Das Gesamtkonzept

Die Analyse der einzelnen Probleme bestätigte die im Vorfeld angenommene Breite und Tiefe des Begriffsbildungsprozesses (vgl. Kapitel 8). Es wurde auch deutlich, dass die Probleme nicht nur isoliert, sondern in ihrer Gesamtheit für die Begriffsbildung förderlich waren. So benötigten die Schülerinnen und Schüler das Cauchy-Integral zur Bestimmung des Integrals der zweiten Jungenfunktion bei dem Problem des Geschlechterwachstums (vgl. Auszug 16). Dies ist ein Ansatz, den sie im Anschluss an das Fahrtenschreiberproblems entwickelten.

Auszug 16 aus FH von g1(1)

Nachdem wir mit Hilfe der Fahrtenschreiberaufgabe wissen, dass die Grundfunktion sich durch die Fläche zwischen Funktionsgraphen und x-Achse bestimmen lässt, berechnen wir die zweite Jungenfunktion mit Hilfe unserer entwickelten Formel.

Dies ermöglichte den Schülerinnen und Schülern verschiedene Integralbegriffe mit unterschiedlichen Geltungsbereichen herzuleiten. Damit existiert für die Schülerinnen und Schüler, die an KLIP teilgenommen haben, nicht nur *das* Integral, sondern unterschiedliche Definitionen, die für unterschiedliche Handlungsfelder viabel sind.

Den Schülerinnen und Schülern ist klar geworden, dass das Riemann-Integral im Kontext dieser Unterrichtsreihe die umfassendste Definition eines Integrals ist, jedoch das Cauchy-Integral vorzuziehen ist, wenn stückweise stetige Funktionen untersucht werden. Die Stammfunktionsintegrierbarkeit erlaubt die Entwicklung von Integrationsregeln und ist ein verhältnismäßig mächtiges Werkzeug zur Bestimmung von Stammfunktionen. Sie ist aber für eine Funktion, deren Stammfunktion nicht als geschlossener Ausdruck darstellbar ist, nicht geeignet. Das Regel-Integral wurde von den Schülerinnen nicht mehr weiter thematisiert.

Es zeigt sich, dass die Prinzipien der sukzessiven Exaktifizierung und der reflexiven Abstraktion der konstruktivistischen Begriffsbildung sich als außerordentlich fruchtbar für die Genese mathematischer Theorien erweisen. Die Schülerinnen konnten, durch singuläre Kernideen gelenkt, Vernetzungen zwischen den einzelnen Begriffen und Aspekten herstellen. Dabei haben sich der Flächeninhaltsaspekt und der Stammfunktionsaspekt als die zentralen Aspekte erwiesen. Der Approximationsaspekt ist als weiterer wichtiger Aspekt zu nennen, während der Mittelwertaspekt auf Grund der mäßigen Akzeptanz des ersten Problems nur peripher entwickelt wurde. Zwar wurde auch mit der Bestimmung von Durchschnittsgeschwindigkeiten eine Vorstellung dieses Aspektes aufgebaut, er konnte während der Unterrichtsreihe jedoch nur von einigen Schülerinnen vertieft werden. Es bietet sich eine Modifikation des ersten Problems an, so dass den Schülerinnen verschiedene Modelle zur Beschreibung des kontinuierlichen Wasserverbrauchs angeboten werden. Insofern war die Vorüberlegung einer einfachen Einstiegsaufgabe dem Leistungsstand dieses Kurses nicht angemessen. In den anderen Kursen ist das Problem zum Teil deutlich besser angenommen worden, was auf die vermutete Abhängigkeit zwischen den Intentionalen Problemen und der Lerngruppe hinweist.

Erfreulich und bemerkenswert ist die Dokumentation der Begriffsbildung in den Forschungsheften. Die Schülerinnen und Schüler verbrachten viel Zeit und viel Mühe mit der Darstellung ihrer Forschung. Sie entwickelten Definitionen, Verfahren, Sätze und Modelle, die sie in die Lage versetzten realitätsnahe und innermathematische Sachverhalte zu beschreiben und zu bearbeiten. Sie erzeugten Methoden, die für mathematisches Arbeiten kennzeichnend sind, und wendeten diese an. Dabei ist besonders bemerkenswert, dass sie Probleme spezifizierten, um allgemeine Zusammenhänge zu erklären.

10.2.4.2 Funktionen des Computereinsatzes

Die in Kapitel 4 dargestellten Funktionen des Computereinsatzes konnten für die Begriffsbildung bei den Schülerinnen und Schülern erfolgreich genutzt werden. Nach anfänglicher Distanz bei den Mädchen, arbeiteten später alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen mit dem Einsatz des Computers. Die ebenfalls zu Beginn beobachtete große Nähe zum Computer, d.h. die Schülerinnen und Schüler probierten oftmals verschiedene Algorithmen, ohne zuvor über einen geeigneten Einsatz des Computers nachzudenken, wurde im Laufe der ersten beiden Wochen durch einen maßvollen, aber gezielten Einsatz abgelöst. Dabei wurde der Computer in erster Linie zum Lösen von Routineaufgaben und zum Veranschaulichen von Funktionsgraphen eingesetzt. Hinsichtlich der Begriffsbildung zeigte sich immer wieder die Perturbationsfunktion des Computers, wie beispielsweise beim Problem zum Geschlechterwachstum (vgl. Abbildung 10.9). Konstruktionsfunktion übernahm der Computer insbesondere bei der Generierung des Cauchy-Integrals (vgl. Abbildung 10.8). Bemerkenswert ist zudem, dass die Schüler und Schülerinnen zu Beginn durch eigene Berechnungen, später durch Plausibilitätsuntersuchungen die Ergebnisse des Computers immer wieder hinterfragten.

KAPITEL XI

11 Auswertung der Abschlusstests

Nachdem alle beteiligten Kurse die Grundvorstellungen zum Integralbegriff und die ersten Integrationsregeln entwickelt und den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung bearbeitet hatten, wurde den KLIP-Kursen und zwei Vergleichskursen ein Abschlusstest zur Bearbeitung gestellt (vgl. Anhang B). Dort sollten sowohl unterschiedliche Begriffe und Aspekte der Integralrechnung, als auch Problemlöse- und Kalkülfähigkeiten abgefragt werden.

Die Auswertung des Tests wird in drei Schritten vorgenommen. Zu Beginn wird das Untersuchungsdesign, d.h. insbesondere die teilnehmende Population, die Testentwicklung und die Testkonzeption dargestellt. Hierbei werden Fragestellungen aus dem theoretischen Teil dieser Arbeit aufgegriffen und auf Grundlage erster Beobachtungen werden weitere Fragestellungen und assoziierte Hypothesen formuliert. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die verwendeten Methoden erörtert und begründet. Im letzten Teil erfolgt die Auswertung und damit die Beantwortung der aufgeworfenen Fragen.

11.1 Das Untersuchungsdesign

Das Untersuchungsdesign setzt sich aus der untersuchten Population, der Entwicklung, Konzeption und Durchführung der Befragung und des Tests zusammen. Der Test und der zugehörige Fragebogen sind im Anhang B zu finden. Die Auswertungen der einzelnen Fragen des Fragebogens sind in Tabelle 11-1 und im Anhang B, in Tabelle 15.1, dargestellt.

11.1.1 Beschreibung der teilnehmenden Populationen

Der Test zur Integralrechnung wurde in den vier Versuchsgruppen (vgl. Kapitel 6.2), die an KLIP teilgenommen haben, und in zwei Kontrollkursen durchgeführt. Die beiden Kontrollkurse LKOO und GKOO1 befanden sich an den Schulen von LKUC und GKUC1 und waren Parallelkurse zu den Versuchsklassen in derselben Kursart. Dies soll neben der oben beschriebenen Konvention deutlich machen, dass es sich um direkte Kontrollkurse handelt. Die genaue Verteilung der insgesamt 119 Schülerinnen und Schüler auf die einzelnen Kurse wird in Tabelle 11-1 dargestellt.

Der Unterrichtsversuch begann zu Anfang des Schuljahres 2000/01. Zu diesem Zeitpunkt befanden sich die Schülerinnen und Schüler zu Beginn des zwölften Jahrgangs. Da dies der Moment ist, an dem in Nordrhein-Westfalen die Leistungskurse zugeordnet werden, konnte man die Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler in den Parallelkursen als gleich annehmen. Die Erfahrung zeigt aber häufig, dass z.B. die durchschnittliche Leistungsstärke in den Leistungskursen von der Wahl des zweiten Leistungskurses abhängt. Deswegen wird zur Beurteilung vergleichbarer Leistungsvoraussetzungen die letzte Zeugnisnote herangezogen.

Um einen Eindruck über die affektive Dimension bei den Schülerinnen und Schülern zu bekommen, wurde ihr Interesse am Mathematikunterricht abgefragt. Man unterscheidet Interesse bekanntlich in dispositionale und aktuale Interessen (vgl. Abschnitt 5.2.2). Mit der Frage nach der Gestimmtheit zum Mathematikunterricht wird auf dispositionale Affekte abgezielt, d.i. in diesem Fall mehr als ein halbes Schuljahr überdauernde Affekte. Dieser Zeitraum ist so gering gehalten, da zu vermuten ist, dass auch mittelfristige Faktoren in die Bewertung eingehen können, wie zum Beispiel Wechsel der Lehrperson oder des Stoffgebiets. Dass bei einigen Schülerinnen und Schülern natürlich auch die konkrete Gestimmtheit Einfluss auf die Beantwortung der Frage nimmt, kann an dieser Stelle nicht völlig ausgeschlossen werden.

Die nachfolgende Tabelle stellt die genannten Aspekte für die teilnehmende Population dar:

Tabelle 11-1. Eigenschaften der Population

Kurs	Anzahl[135]	Mädchen/ Jungen	Noten (in %)			Interesse (in %)		
			gut	teils teils	schwach	gern	teils teils	nicht gern
LKUC	16	8/8	81,3	18,8	0	75	25	0
LKOO	17	4/13	47,1	47,1	5,9	47,1	41,2	11,8
LKUO	19	7/12	47,4	52,7	0	73,7	21,1	5,3
GKUC1	26	18/8	26,9	73,1	0	11,5	42,3	46,2
GKOO1	22	15/7	27,3	59,1	13,6	27,3	22,7	50
GKUC2	20	12/8	25	70	5	30	40	30
ges.	119	64/55	40,3	51,3	4,2	41,2	32,8	18,5

Die Werte zu Interesse als auch die Werte zu den Noten sind von einer fünf- bzw. sechskategorialen Skala auf eine jeweils dreikategoriale Skala reduziert worden. Die genauen Gründe liegen in den verwendeten Verfahren, die ich in Abschnitt 11.2 näher ausführen werde. Bei der Variable *Interesse* sind die beiden ursprünglichen Variablenausprägungen „sehr gern“ und „gern“ und „ungern“ und „sehr ungern“ zu einer Ausprägung zusammengefasst worden. Dies ist natürlich ein Informationsverlust, jedoch kein problematischer, da die Merkmalsausprägungen, z.B. „sehr gern“ und „gern“, eine Tendenz ausdrücken, die ebenfalls durch die Ausprägung „gern“ repräsentiert wird. Bei der Variable *Note* wurden jeweils zwei aufeinanderfolgende Noten in chronologischer Reihenfolge zusammengefasst. Dies ist, wie die Notenspalte mit der Ausprägung „schwach“ zeigt, eine problembehaftete Reduzierung. Das liegt insbesondere im kategorialen Charakter der Notenskala begründet. Bis zur Jahrgangsstufe 12 ist der Sprung von der Note 4 zur Note 5 ein wesentlich größerer Sprung als bei allen anderen Notenwechseln. In den Jahrgangsstufen 12 und 13 in NRW verlagert sich der Problembereich auf den Sprung von der Note 4 zur Note 4-, da die Note 4- ein Defizit in der Abiturwertung darstellt, von denen man insgesamt nur wenige ansammeln darf um zum Abitur zugelassen zu werden. Dies hat zur Folge, dass im Bereich „teils teils“ sehr viele sogenannte „schwache“ Schülerinnen und Schüler mitrepräsentiert werden. Da es in dieser Arbeit jedoch nicht um Leistungsmessung auf Grundlage der im letzten Schuljahr erteilten Note geht, sondern ein möglicher Einfluss der Leistungsvoraussetzungen auf andere Faktoren bei den direkt zum Vergleich stehenden Kursen aufgedeckt

[135] Einige Schülerinnen und Schüler haben an dem Test nicht teilgenommen. Dies erklärt mögliche Differenzen in den Angaben zur Anzahl der Schüler und Schülerinnen.

werden soll und zudem die umfassende Information ebenfalls durch die Note vier nicht gegeben ist, soll die Reduzierung an dieser Stelle dem angestrebten Zweck genügen.[136]

Die Verteilung der Noten zwischen den einzelnen KLIP-Kursen und ihren Kontrollkursen deutet in beiden Kursarten auf leichte Vorteile zu Gunsten der KLIP-Kurse hin. Im Leistungskursbereich gibt es deutlich mehr Schülerinnen und Schüler in der ersten Ausprägung, während im Grundkursbereich dieser Vorteil nicht so groß ausfällt und vorwiegend in der zweiten Ausprägung zu lokalisieren ist. Der dritte Leistungskurs LKUO lässt sich eher mit dem Kontrollkurs LKOO vergleichen, während der dritte Grundkurs GKUC2 sich auf dem Notenniveau des anderen KLIP-Kurses GKUC1 befindet. Erwartungsgemäß sind die Schülerinnen und Schüler aus den Leistungskursen besser vorbenotet als die Schülerinnen und Schüler aus den Grundkursen. Die sich hier andeutende Abhängigkeit der beiden Variablen Kursart und Note soll in diesem Abschnitt eingehend untersucht werden.

Die Verteilung des Interesses der Schülerinnen und Schüler am Fach Mathematik zeigt gleichermaßen deutliche Unterschiede zwischen den Leistungs- und Grundkursen. Dieser Hinweis auf einen Zusammenhang zwischen Leistungskurswahl und Interesse mag nicht verwundern, da es eine wünschenswerte Voraussetzung ist den Leistungskurs nach den eigenen Interessen zu wählen. Die Zusammenhänge zwischen diesen beiden Faktoren innerhalb von KLIP wird im dritten Teil dieses Kapitels genauer untersucht. Inwieweit eine denkbare Abhängigkeit von den Noten des letzten Halbjahres besteht, ist ebenfalls Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung. Vergleicht man erneut die Kontrollkurse untereinander, fällt auf, dass bei den Leistungskursen die Interessenverteilung der Notenverteilung sehr ähnlich ist. Dies kann auf einen Zusammenhang zwischen Note und Interesse deuten. Im Grundkursbereich ist der prozentuale Anteil an Schülerinnen und Schülern, die das Fach nicht mögen im Vergleich mit den als „schwach“ eingestuften Schülerinnen und Schülern sehr hoch. Diese Heterogenität lässt sich wiederum mit der Schwierigkeit der Noteneinstufung begründen oder deutet darauf hin, dass viele Schülerinnen und Schüler mit „nur“ ausreichenden Leistungen in diesem Fach dieses nur ungern ausüben.

11.1.1.1 Beschreibung der Kontrollgruppen

Nachdem in den Abschnitten 6.2 und 9.3 die einzelnen Lernumgebungen für die am Unterrichtsversuch teilnehmenden Kurse beschrieben wurden, soll an dieser Stelle die Lernumgebung der beiden Kontrollkurse beschrieben und diskutiert werden. Grundlage der Beschreibung sind die Fragebögen für die Schülerinnen und Schüler und die Lehrpersonen sowie Interviews mit den Lehrpersonen. Die Interviews und die Fragen im Fragebogen der Schülerinnen und Schüler dienen der Klärung möglicherweise missverständlich dargestellter Sachverhalte im Fragebogen der Lehrerinnen und Lehrer. Dazu zählt insbesondere eine mögliche unterschiedliche Wahrnehmung der Lernumgebung durch die Schülerinnen und Schüler und der jeweiligen Lehrperson. Um ein Beispiel zu geben: Die Lernumgebung sieht eine Bearbeitung einer *alltagsorientierten* Aufgabe in *Gruppenarbeit* mit *Einsatz des Computers* vor. Eine Schülerin sieht aber in ihrer Erfahrungswelt *keinen Bezug* der Aufgabe *zu Alltagserlebnissen.* Ferner befindet sie sich in einer Gruppe, arbeitet aber die meiste Zeit *alleine* und benutzt dabei auch möglichst *wenig den Computer*, der in ihren Augen nur im äußersten Notfall zum Einsatz kommen sollte. Eine Beschreibung der Lernumgebung von Schülerin und Lehrperson, die aus ihrer jeweiligen Position argumentieren, wird vermutlich sehr unterschiedlich ausfallen. Hinsichtlich einer adäquaten und nützlichen, d.i. in diesem Fall einer statistischen, Beschreibung der Lernumgebung wird dieses Dilemma nicht durch statistische Verfahren und ebenfalls nicht durch reflexive Interviews aller Beteiligten überwun-

[136] Die vorgenommene Reduzierung wird an den jeweiligen Stellen separat problematisiert.

den. Ersteres würde die in meinen Augen sinnvolle strenge Trennung der Positionen von Lehrperson und Lernenden aufheben (vgl. Abschnitt 1.3). Und zweitens würde die Position des Forschers noch stärker ins Geschehen rücken, da die notwendigen Interpretationen die subjektive Erlebniswelt des Forschers in die individuelle und soziale Welt der Probanden und Probandinnen einfließen ließen. Ein Ausweg besteht in der Beibehaltung der Trennung der Perspektiven von Lehrenden und Lernenden. Die Lehrperson stellt die Lernumgebung zur Verfügung und die Schülerin bzw. der Schüler arbeitet gemäß ihrer bzw. seiner subjektiven Erfahrungswelt in derselben. Da in dieser Arbeit die Auswirkungen der Bereitstellung einer bestimmten Umgebung untersucht werden sollen, wird die von der Lehrperson bereitgestellte Lernumgebung als tatsächliche Lernumgebung für die Untersuchung angenommen. Diese wird mit den subjektiven Erfahrungswelten aller Schülerinnen und Schüler dieses Kurses verglichen und bei großen Abweichungen problematisiert. Derartige Abweichungen werden jedoch nicht Teil einer statistischen Untersuchung sein, sondern sie sollen die auf Grundlage der von der Lehrperson bereitgestellten Lernumgebung erhobenen statistischen Ergebnisse verstehen helfen. Aus diesem Grund werden die Angaben der Lehrpersonen als Beschreibung der Lernumgebung zu Beginn dargestellt, um in einem zweiten Schritt bei Abweichungen die Interpretation und das Erleben durch die Schülerinnen und Schüler darzustellen.[137] Die nachfolgenden Darstellungen filtern nur die in meinen Augen auffälligen Merkmale heraus. Für eine tiefergehende Analyse sei auf Anhang C, Tabelle 15.1 verwiesen.

Der Leistungskurs LKOO. Der Leistungskurs zeichnet sich durch einen lehrpersonenzentrierten Unterricht aus. Der Unterrichtsgang ist sequentiell und kalkülorientiert strukturiert. Die Einführungs- und Übungsaufgaben sind in der Regel Rechenaufgaben und weisen wenig Bezug zur Realität auf. Die Sozialformen des Unterrichts sind neben dem dominierenden Unterrichtsgespräch, welches in erster Linie durch Beiträge der Lehrperson gekennzeichnet ist, die Einzelarbeit und Vorträge durch Schülerinnen und Schüler. Die Einzelarbeit scheint nur sehr selten stattzufinden, da sie von 64,7% der Schüler und Schülerinnen überhaupt nicht erlebt wird. Der Schülerinnen- bzw. Schülervortrag ist die einzige Sozialform, die von einer einzelnen Schüler bzw. einem einzelnen Schülers erlebt wird (Zustimmung: 5,9%/Keine Zust.: 52,9%) (vgl. Tabelle 15.1).

Der im Unterricht gelehrte Integralbegriff ist der des Riemann-Integrals. Dominierende Aspekte sind neben der Kumulation der F-Aspekt, welcher in Standardaufgaben häufig geübt wird.[138] Ergänzend wurde der S-Aspekt problematisiert. Der Hauptsatz der Integralrechnung wurde besprochen und bewiesen.

Der Grundkurs GKOO1. Der typische Ablauf einer Unterrichtsstunde im Kontrollkurs des Grundkursbereichs ist: Motivierung mit einer Problemstellung, gemeinsame Erarbeitung des zu lernenden Begriffs im Unterrichtsgespräch und zum Schluss eine Übungsphase der gelernten Begriffe und Verfahren in Partner- bzw. Partnerinnen- oder Einzelarbeit. So ist das Unterrichtsgespräch auch hier die dominierende Sozialform, wird aber durch Partner- bzw. Partnerinnen-, Einzel- und Gruppenarbeiten und Schülerinnen- bzw. Schülervorträge ergänzt. Dabei kommt der Partner bzw. Partnerinnenarbeit das stärkste und der Gruppenarbeit das geringste Gewicht zu. Die Aufgabenkultur ist kalkülorientiert, wobei zum Teil Anwendungen mit Bezug zur Alltagswirklichkeit eingebunden werden. Ferner wurde im Verlauf des Unterrichts das CAS DERIVE eingesetzt, was von einem Viertel der

[137] Die Testergebnisse, auf die im Folgenden des Öfteren verwiesen werden, sind im Anhang C. Tabelle 15.1 dokumentiert. Skalenniveau und vorgenommene Transformationen werden dort erläutert.
[138] Eine typische Aufgabe ist von der Art der ersten Testaufgabe.

Schülerinnen und Schüler bestätigt wird. Daraus ist zu schließen, dass der Computer eher selten zum Einsatz gekommen ist, was wiederum durch die Lehrperson bestätigt wird.

Auch in diesem Kurs wurde das Riemann-Integral gelehrt, Aspekte des Integralsbegriffs waren neben den Grundvorstellungen der Kumulation und des Gesamteffekts in erster Linie der F-Aspekt und nachrangig der S-Aspekt. Der M-Aspekt wurde nur kurz problematisiert.

11.1.2 Konzeption des Tests

Erkenntnisleitende Fragen zur Konzeption des Testes waren:

(1) Welche Begriffe und Aspekte der Integralrechnung haben die Schüler und Schülerinnen auf Grundlage von KLIP aufgebaut?

(2) Welche Kompetenzen und Fähigkeiten haben sie durch konstruktivistisches Lernen im Sinne von KLIP erworben? Die Frage nach einem Erwerb von Problemlösefähigkeiten und Kalkülfähigkeiten steht dabei im Vordergrund.

(3) Gibt es signifikante Unterschiede im Lösungsverhalten der Aufgaben zwischen Leistungskurs und Grundkurs, zwischen Mädchen und Jungen, zwischen den am Unterrichtsversuch beteiligten Schülerinnen und Schülern und den Kontrollkursen?

Vor dem Hintergrund dieser Fragen wurde analog zu der Entwicklung der Intentionalen Probleme (vgl. Kapitel 8) die aktuelle didaktische Literatur (vgl. Fußnote 72) zu dem Thema Analysis in der Sekundarstufe II unter Einbeziehung des Computereinsatzes eingehend studiert. Es wurden Aufgaben aus den verschiedenen Lehrbüchern (vgl. Fußnote 73) nach Zugehörigkeit zu Kalkül-, Problemlöse- und Verständnisaufgaben klassifiziert und auf dieser Grundlage eine Sammlung von Aufgaben zusammengestellt, die alle wichtigen Aspekte der Integralrechnung, die mit Hilfe der Intentionalen Probleme erarbeitet werden können, enthalten. Die Aufgaben sollen die verschiedenen Integralbegriffe und Integralaspekte abfragen, wobei die Kenntnis aller Begriffe durch die Aufgaben nicht notwendig vorausgesetzt wird. Es besteht jedoch die Möglichkeit zur Anwendung verschiedener Begriffe. Inwieweit die Klassifizierung zu den einzelnen Aufgabentypen und Aspekten sinnvoll und gerechtfertigt ist, wird in Abschnitt 11.3.4 mit Hilfe einer Homogenitätsanalyse untersucht.

Unter dem Aspekt der Vergleichbarkeit wurden die Aufgaben so konzipiert, dass sie ohne Computereinsatz lösbar sind. Während des Testes durfte kein CAS oder der TI benutzt werden. Ebenso wurde versucht, eine ausgewogene Mischung von Aufgaben zu erstellen, die beiden Gruppierungen die gleichen Lösungschancen ermöglicht, das heißt, dass sowohl typische Lehrbuchaufgaben als auch an KLIP angelehnte Aufgaben in den Test eingehen, wobei zugleich eine deutliche Abgrenzung zu im Unterricht bearbeiteten Aufgaben bestehen musste. Die Sammlung der Aufgaben wurde in zwei Sets unterteilt und einer Gruppe von Schülern und Schülerinnen aus dem Grundkurs- und Leistungskursbereich, die zu dem Zeitpunkt gerade das Abitur abgeschlossen hatten, zur Bearbeitung vorgelegt. Auf Basis dieses Pretests wurden die Aufgaben überarbeitet und zu einem Test zusammengefasst. Dabei wurde darauf geachtet, dass der Test eine reine Kalkülaufgabe (Aufgabe 1), eine reine Problemlöseaufgabe (Aufgabe 3), eine Aufgabe, an der beide Fähigkeiten gezeigt werden können (Aufgabe 2), und eine Aufgabe, die das Verständnis der einzelnen Aspekte des Integralbegriffs abfragen kann (Aufgabe 4 und 5), enthält.

Die Verständnisaufgaben waren wiederum unterteilt: Aufgabenteile 4a-c enthalten Fragen zu den einzelnen Integralaspekten, wobei 4a, die nach Zusammenhängen mit dem M-Aspekt fragt, mit Verweis auf Aufgabe 2 gelöst werden kann. In den Aufgabenteilen wird eine abstrakte Problemstellung mit einer Verständnisfrage verknüpft. Darüber hinaus sollen die ersten drei Aufgaben die verschiedenen Integralaspekte enthalten. Alle Aufgaben sind mit den Anforderungen der Richtlinien des Landes NRW (KULTUSMINISTERIUM, 1999) abgeglichen. Nachfolgend werden die zentralen Aspekte der einzelnen Aufgaben dargestellt.

Aufgabe 1. Die erste Aufgabe[139] verlangt die Fähigkeit, Integral und Flächenbestimmung zu unterscheiden. Dazu ist jedoch keine Problemlösefähigkeit von der Schülerin bzw. dem Schüler gefordert, sondern es müssen aus einer gegebenen Funktionsgleichung die Nullstellen bestimmt und dann über die daraus entstehenden Intervalle integriert werden. Der zu integrierende Funktionsterm ist ein Polynom zweiten Grades. Die Aufgabe lässt sich rein schematisch lösen, ohne ein tieferes Verständnis von der Integralrechnung zu besitzen.

Aufgabe 2. Die zweite Aufgabe ist dreigeteilt. Im Aufgabenteil a müssen die Schülerinnen und Schüler aus sieben gegebenen Ozonwerten einen durchschnittlichen Stundenwert bestimmen. Die erforderlichen Lösungsfähigkeiten sind reine Rechenfertigkeiten, die sich inhaltlich in der Sekundarstufe I verorten lassen. Der Aufgabenteil b stellt einen Funktionsterm zur Verfügung, der die kontinuierliche Ozonentwicklung in der besagten Stunde beschreibt. Aus diesem Term lassen sich die sieben Werte des ersten Teils berechnen. Zur Bestimmung des Mittelwerts auf Grundlage der stetigen Funktion muss diese in dem gegebenen Intervall integriert und dieser Wert durch die Länge des Intervalls dividiert werden. Das ist eine Aufgabe, die den Mittelwertaspekt der Integralrechnung betont.

Aufgabe 3. Bei gegebenen Graphen eines Temperaturzuwachses von Wasser sollen die Schülerinnen und Schüler einen bestimmten Zeitpunkt bestimmen, an dem das Wasser eine Temperatur von 30° besitzt. Hier ist es wichtig, sowohl den Approximationsaspekt als auch den Flächeninhaltsaspekt zu erkennen. Dann kann durch Kumulation der Gesamteffekt näherungsweise bestimmt werden. Weiterhin soll der Zeitpunkt bestimmt werden, an dem die maximale Temperatur erreicht wird. Hier lässt sich sowohl über den F-Aspekt als auch über den S-Aspekt argumentieren. Die Aufgabe ist keine Kalkülaufgabe, sondern verlangt Problemlösefähigkeiten. Da im Aufgabenteil a „nur" der Verlauf eines Graphen beschrieben werden muss und dies für den Integralbegriff nicht relevant ist bzw. ebenso aus den Lösungen zu Teil b abgelesen werden kann, wird dieser Teil für die Untersuchung nicht berücksichtigt.

Aufgabe 4. Die vierte Aufgabe ist in fünf Teile unterteilt. Es werden keine Kalkülfähigkeiten verlangt. Zweck dieser Aufgabe ist es das Verständnis der einzelnen Integralaspekte abzufragen. In den ersten drei Aufgabenteilen werden jeweils Zusammenhänge zwischen Integralrechnung und dem Mittelwertaspekt, dem Flächeninhalts- und dem Stammfunktionsaspekt abgefragt. Hier besteht die Möglichkeit auf die Aufgaben 1, 2 bzw. 5 Bezug zu nehmen. Dies ermöglicht in der Auswertung Aufgaben mit denselben Aspekten miteinander zu vergleichen. Der vierte Aufgabenteil befasst sich mit der Bestimmung der Geschwindigkeit zu einem konkreten Zeitpunkt bei gegebener Beschleunigungskurve und Anfangsgeschwindigkeit. Je nach individuellem Zugang können die Schülerinnen alle vier Integralaspekte aktivieren. Zusätzlich kann der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung zur Anwendung kommen, da aus dem Anfangswert und dem Integral der Kurve der Endwert des Intervalls und damit der Lösungswert bestimmt werden kann. Im letzten Teil dieser Aufgabe muss aus einer Funktion, die die Niederschlagsmenge pro

[139] Die Aufgabentexte sind in Anhang B. Abschnitt 15.1.1 zu finden.

Minute auf ein m^2 Fläche beschreibt, die Gesamtniederschlagsmenge bestimmt werden. Auch hier können mehrere Aspekte angewendet werden. Insgesamt soll die Aufgabe 4 die bei den Schülerinnen und Schülern vorhandene Bandbreite der Integralaspekte explorieren.

Aufgabe 5. Diese Aufgabe knüpft an die vierte Aufgabe an, da auch hier das Verständnis des S-Aspektes benötigt wird. Bei dieser Aufgabe handelt es sich, wie bei Aufgabe 1, um eine typische Schulbuchaufgabe, die jedoch nicht kalkülorientiert ist, sondern mehr das ikonische Repräsentationsniveau der Schülerinnen und Schüler bemüht. Es muss zu einem gegebenen Graphen einer Funktion deren Stammfunktion skizziert werden.

11.1.3 Durchführung des Tests

Der Test wurde in allen vier Schulen nach Einführung der Integralbegriffe, der Bearbeitung der Summen- und Faktorregel, dem Integrieren von Polynomen und der Behandlung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung durchgeführt. Die Zeitvorgabe war für alle Kurse gleich und betrug 80 Minuten. In den Schulen mit den Kontrollkursen wurde der Test zeitgleich geschrieben. Als Hilfsmittel stand ein Taschenrechner zur Verfügung.

11.2 Methodologie

Die oben genannten Forschungsfragen haben alle zum Ziel einen Zusammenhang zwischen dem Lösungsverhalten bei den einzelnen Aufgaben und gewissen Gruppenzugehörigkeiten[140], wie zum Beispiel der Teilnahme an KLIP, der Zugehörigkeit zu einem Leistungskurs o.ä., zu explorieren.

Dazu betrachte ich die Variablen der Gruppenzugehörigkeit als Prädiktoren und versuche deren Einfluss auf das Lösungsverhalten als Responsevariable zu messen. Hinsichtlich der Untersuchung des Einflusses von mehreren unabhängigen kategorialen Variablen auf eine Responsvariable bieten sich verschiedene statistische Verfahren an: z.B. die Diskriminanzanalyse, die logistische und lineare Regression und log-lineare Analyseverfahren. Die logistische Regression erscheint hier als bestmögliche Methode. Sie ist entsprechend dem Datenniveau ein sachadäquates Verfahren. Die anderen Verfahren scheiden auf Grund der Datenqualität aus. Das Modell der logistischen Regression und das darauf begründete statistische Analyseverfahren wird in Abschnitt 12.2.1 kurz skizziert.

In Abschnitt 12.2.2 wird das Verfahren der Homogenitätsanalyse dargestellt. Dieses Verfahren ist vergleichbar mit dem bekannten Verfahren der Hauptkomponentenmethode in der Faktorenanalyse. Anders als in der Faktorenanalyse werden in der Homogenitätsanalyse nominale Daten zu Grunde gelegt. Ziel der Homogenitätsanalyse ist es, Faktoren zu finden, welche mögliche Zusammenhänge zwischen dem Lösungsverhalten bei einzelnen Aufgaben beschreiben. So sollten sich beispielsweise zu den als kalkülorientiert klassifizierten Aufgaben oder aber bei den Aufgaben, bei denen derselbe Integralbegriff abgefragt wird, unterschiedliche Faktoren erkennen lassen. Verbunden mit der Frage nach latenten Faktoren ist die Frage nach der Darstellbarkeit des Datenmaterials in niedrigdimensionalen Räumen ohne großen Informationsverlust. Je nach Anzahl der extrahierten Faktoren sind Darstellungen im $\mathbb{R}^2$ oder im $\mathbb{R}^3$ denkbar.

Zur Generierung von Faktoren bzw. Dimensionen, die mehrere kategoriale Variablen erklären können, finden ebenfalls Verfahren wie die ordinale Hauptkomponentenanalyse, oder die Korrespondenzanalyse Anwendung.

[140] Unter Gruppen werden in dieser Arbeit die Kategorien der unabhängigen und abhängigen Variablen verstanden.

In der Korrespondenzanalyse werden allerdings immer nur zwei Variablen untersucht, was schon bei wenigen Variablen zu vielen unverbundenen Tabellen führen würde, deren Zusammenhänge untereinander dann nur noch schwer erkennbar wären.

Die ordinale Hauptkomponentenanalyse wird verwendet um eine große Anzahl von Variablen auf wenige Dimensionen zu reduzieren, wobei Informationen über das Skalenniveau unterschiedlicher Datenniveaus beibehalten werden können.

Da es in dieser Untersuchung um die Aufdeckung der Zusammenhänge von wenigen Variablen geht, die überwiegend binäres Datenniveau besitzen und bei den mehrkategorialen Variabeln die ordinale Struktur gegenüber Diskriminierungs- und Homogenitätseigenschaften der Variablen im Hintergrund stehen, erweist sich die Homogenitätsanalyse als ein für die Testauswertung adäquates Verfahren.

Im Folgenden werden die für das Datenniveau und der in dieser Arbeit verfolgten Fragestellungen Verfahren näher erläutert. Das sind die Verfahren der *logistischen Regression* und die *Homogenitätsanalyse für kategoriale Daten* (HOMALS[141]).

11.2.1 Logistische Regression[142]

In diesem Abschnitt wird zuerst das Modell der logistischen Regression vorgestellt. Daran anschließend werden im zweiten Teil Interpretationsmöglichkeiten des Modells und die für diese Arbeit zentrale Analysestruktur der logistischen Regression erläutert.

11.2.1.1 Modellbeschreibung

Das Verfahren der metrischen linearen Regression wird als bekannt vorausgesetzt. Der klassische Ansatz der univariaten linearen Regression für metrische Variablen lautet

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \beta_2 x_{j2} + \ldots + \beta_k x_{jk} + u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N \qquad (1)$$

mit y_j als j-te von N Beobachtungen der abhängigen Responsevariable y, dem Ausprägungsvektor $\boldsymbol{x}_j = (1, x_{j1}, \ldots, x_{jk})'$, dem Regressionskoeffizientenvektor $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ und der Stör- oder Residualvariable u_j bei der j-ten Variable.

In der vorliegenden Arbeit sind die abhängigen Variablen ausschließlich dichotom und mit 0 und 1 kodiert. Die unabhängigen Variablen sind kategorial. Der Einfachheit halber werden im Folgenden die unabhängigen Variablen erst einmal als dichotome Variablen betrachtet.

Ein einfaches lineares Modell, das die Auftretenswahrscheinlichkeit $P(y=1\,|\,\boldsymbol{x})$ in Abhängigkeit von dem Ausprägungsvektor $\boldsymbol{x} = (1, x^1, x^2, \ldots, x^L)$ für L verschiedene unabhängige Variablen, beschreibt, ist durch

$$P(y=1\,|\,\boldsymbol{x}) = \beta_0 + \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_L x^L \qquad (2)$$

gegeben. Da die L Regressoren alle binär sind, benötigt man pro Variable nur eine Kategorie, da die andere Kategorie als Referenzkategorie fungiert. Diese wird durch die sogenannte *Effektkodierung* für dichotome Variablen erfasst: $x^1 = 1$, falls eine zuvor bestimmte Kategorie der beiden möglichen Kategorien der ersten Variable vorliegt, und $x^1 = -1$, falls

[141] HOMALS ist im SPSS-Modul Categories implementiert.
[142] Die nachfolgenden Ausführungen sind angelehnt an BACKHAUS et al. (2000) & FAHRMEIR & HAMERLE (1984).

die andere Kategorie vorliegt. Bezeichnet man alle 2^L möglichen Variablenkombinationen mit $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{2^L}$, erhalten wir die bedingten Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(y=1 \mid \boldsymbol{x}_i) =: \pi_i$ mit $\boldsymbol{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^p)$ und $1 \le p \le L$ bei Berücksichtigung von p unabhängigen Variablen.

Für eine 0/1-verteilte abhängige und eine metrische unabhängige Variable ist das in (2) beschriebene Modell nicht anwendbar, da die durch die Regressionsfunktion $\beta_0 + \sum_{l=1}^{p} \beta_l x_i^l$ prognostizierten Werte außerhalb des [0;1]-Intervalls liegen können. Mit Hilfe der logistischen Regression wird dieses Problem umgangen. Statt die auf das Einheitsintervall beschränkte Eintrittswahrscheinlichkeit für $y=1$ zu betrachten, wird das durch $\pi_i/(1-\pi_i)$ definierte Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten als Responsefunktion festgelegt. Dadurch erhalten wir das Intervall $[0, +\infty]$ für die Werte der modifizierten Wahrscheinlichkeiten. Um nun auch noch Werte unter Null zuzulassen, logarithmisieren wir diesen Wert und betrachten die sogenannte Regressionsgleichung der logistischen Regression:

$$\ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} \qquad (3)$$

mit $\boldsymbol{\beta}$ als Regressionskoeffizientenvektor.

Der Ausdruck auf der linken Seite wird auch als „Logit“ bezeichnet. Die Koeffizienten β_l geben den Einfluss der Variablen x^l auf das Logit an. Die dazu äquivalente Darstellung

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = e^{\beta_0 + \beta_1 x_i^1 + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_p x_i^p} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x_i^1} \cdots e^{\beta_p x_i^p} \quad i = 1, 2, \ldots, 2^L, 1 \le p \le L \qquad (4)$$

liefert eine weitere Interpretationsmöglichkeit: e^{β_l} gibt an, wie sich das Wirkungsverhältnis der komplementären Wahrscheinlichkeiten ändert. Man nennt e^{β_l} auch die „odd ratio“.

Für die Eintrittswahrscheinlichkeit π_i ergibt sich somit

$$\pi_i = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_i^1 + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_p x_i^p)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^L, 1 \le p \le L. \qquad (5)$$

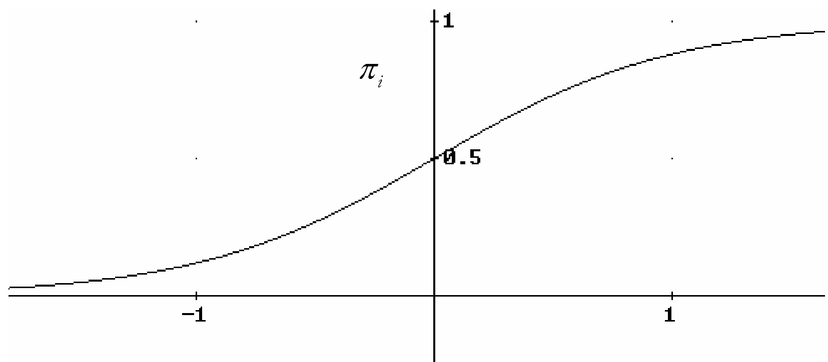


Abbildung 11.1. Beispiel einer logistischen Funktion $z_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^1 + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_p x_i^p$

Ziel der logistischen Regression ist die Entwicklung eines Modells, das eine optimale Trennung der Ausprägungen der abhängigen Variable beinhaltet. Die Schätzung der Koeffizienten erfolgt in dieser Arbeit nach der Maximum-Likelihood-Methode[143], d.h. durch Maximierung der β-Werte der LogLikelihood-Funktion.

Dies ergibt die Schätzer $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta_0}, \widehat{\beta_1}, \ldots, \widehat{\beta_p})$ für den unbekannten Koeffizientenvektor $\boldsymbol{\beta}$. Je größer die β-Werte bei standardisierten unabhängigen Variablen, desto besser ist deren Trennkraft. Gute Trennkraft heißt hier, dass das geschätzte Modell den Kategorien der abhängigen Variablen mit möglichst hohen Wahrscheinlichkeiten nach (5) einheitlich eine der beiden Kategorien der unabhängigen Variable zuordnet. Aus den geschätzten Koeffizienten erhält man mit (5) die geschätzten Wahrscheinlichkeiten $\widehat{\pi}_i$.

Kategoriale unabhängige Variablen. Das bis hierin dargestellte Modell problematisiert noch nicht die besondere Situation nicht-dichotomer unabhängiger Variablen. Während im Falle von dichotomen Variablen die Regressionskoeffizienten und alle anderen wichtigen Werte für die Referenzausprägung aus der ersten Ausprägung abgelesen werden und relativ einfach interpretiert werden können, ist das im mehrkategorialen Fall nicht mehr so einfach.

Bei Variablen mit $K > 2$ Ausprägungen werden $K-1$ neue Variablen geeignet definiert und als weitere unabhängige, sogenannte Dummyvariablen eingeführt. So entstehen beispielsweise aus der Variable Interesse mit drei Ausprägungen zwei Variablen Interesse 1 und Interesse 2 mit den Koeffizienten β_{l_1} und β_{l_2}. Die *Effekt-Kodierung* für mehr-kategoriale Variablen ordnet dem fehlenden Koeffizienten β_{l_3} durch $\beta_{l_3} = -\beta_{l_1} - \beta_{l_2}$, oder allgemein durch

$$\beta_{l_K} = \sum_{i=1}^{K-1} -\beta_{l_i} \qquad (6)$$

einen Wert zu. Das logistische Modell lautet dann

$$\ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_{11}x_i^{1,1} + \beta_{12}x_i^{1,2} + \ldots \beta_{1K_1-1}x_i^{1,K_1-1} + \beta_{21}x_i^{2,1} + \ldots + \beta_{pK_p-1}x_i^{p,K_p-1}. \qquad (7)$$

Güte des Gesamtmodells. Um die Güte des Gesamtmodells zu überprüfen, wird in dieser Arbeit der Likelihood Ratio-Test (LR-Test) und Mc Faddens-R² (McF-R²) verwendet. Der LR-Test vergleicht den LL_V-Wert, d.i. der maximierte LL-Wert mit allen zu berücksichtigenden Variablen, mit dem LL_0-Wert, d.i. der maximierte LL-Wert des Nullmodells (die β-Werte der unabhängigen Variablen sind gleich Null gesetzt). Ist die Distanz zwischen diesen beiden Werten groß, so tragen die unabhängigen Variablen zur Erklärung der Trennung der Ausprägungen in einem großen Maße bei. Beim LR-Test wird die Distanz mit –2 multipliziert, damit das so entstehende Gütemaß asymptotisch $\chi(df)^2$-verteilt[144] ist und die Signifikanz des Modells hinsichtlich der Nullhypothese $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$ beurteilt werden kann.

---

[143] Eine Maximum-Likelihood-Schätzung ist nicht möglich, wenn eine Kategorien keine Fälle enthält. Aus diesem Grund ist es auch sinnvoll, die Anzahl der Variablenkategorien möglichst gering anzusetzen.

[144] df bezeichnet die Anzahl der Freiheitsgrade.

McF-R² stellt ebenfalls das vollständige Modell dem Nullmodell gegenüber: $McF\text{-}R^2 = 1 - \frac{LL_V}{LL_0}$. Bei Werten im Bereich von 0,2-0,4 kann schon von einer guten Modellanpassung gesprochen (vgl. BACKHAUS 2000).

Damit liefert der LR-Test eine Beurteilungsgrundlage für die Frage nach der Angepasstheit des Modells und McF-R² stellt ein Maß für die Trennkraft der unabhängigen Variablen zur Verfügung.

Modell-Overfitting. Bei der Beurteilung der Güte des Gesamtmodells wird noch nicht auf ein mögliches Modell-Overfitting eingegangen. Zur Überprüfung stehen der LR-Test, McF-R² und der Wald-Test zur Verfügung. Sowohl beim LR-Test als auch bei McF-R² wird das vollständige Modell gegen ein reduziertes Modell getestet. Beim Wald-Test wird $W_l = \frac{\beta_l^2}{s_{\beta_l}^2}$ mit s_{β_l} als Standardfehler von β_l, $l = 0,1,\ldots,p$, bestimmt. Dieser Wert gibt Auskunft darüber, ob eine Variable Einfluss auf die Trennung der Ausprägungen der abhängigen Variable hat. Die entsprechende Null-Hypothese besagt, dass das β_l keinen Einfluss auf die Trennung besitzt. W ist asymptotisch χ^2-verteilt.

Anforderungen an das Datenmaterial. Die Voraussetzungen für die unabhängigen Daten liegen in einer weitgehenden Freiheit von *Multikollinearität*, so dass eine wechselseitige Beeinflussung seitens der Regressoren weitgehend ausgeschlossen werden kann. Einen ersten Anhaltspunkt für Multikollinearität liefern die ϕ-Koeffizienten zwischen den Variablen. Hohe Korrelationen weisen auf starke Multikollinearität hin. Eine weitere Möglichkeit, Multikollinearität zu entdecken, besteht in der Vorwärts- und Rückwärtsselektion der Variablen in der Regressionsgleichung. Ein weiterer Wert, der einen Anhaltspunkt über die lineare Abhängigkeit der Variable x^l zu allen anderen in der Regressionsgleichung enthaltenen unabhängigen Variablen liefert, ist das *Bestimmtheitsmaß* r_l^2. Der Wert 1-r_l^2 heißt die *Toleranz* der Variablen x^l. In SPSS führen Toleranzwerte unter dem Schwellenwert 0,0001 zum Ausschluss der jeweiligen Variable. Dieser Wert bietet aber keine Sicherheit bzgl. Multikollinearität. In der nachfolgenden Untersuchung wird deswegen ein Wert von 0,5 als Schwellenwert gewählt, was die Anforderungen an das Modell deutlich erhöht.

Wechselwirkungen. Hinsichtlich möglicher Wechselwirkungen zwischen den unabhängigen Variablen wird die in dieser Arbeit verwendete Strategie die der Vorwärts- und Rückwärtsselektion sein. Sollte es aber nicht möglich sein, auf eine der Variablen zu verzichten, so werden innerhalb des Modells die jeweiligen Wechselwirkungen untersucht. Dazu werden neue Variablen eingeführt, die die Produkte der wechselwirkenden Variablen darstellen. Für diese neuen Variablen werden ebenfalls Regressionskoeffizienten geschätzt, die darüber Aufschluss geben zwischen welchen Kategorien Wechselwirkungen vorliegen.

Residuentest. Bislang wurden Effekte, die von einzelnen Fällen des Modells ausgehen, noch nicht berücksichtigt. Dazu werden die individuellen Residuen jedes Falles untersucht. Diese Residuen sind die Differenzen der tatsächlich beobachteten und der durch das Modell geschätzten Wahrscheinlichkeit. Um die Stärke eines Klassifikationsfehlers darzustellen, dient das für jeden Fall zu berechnende Pearson-Residuum

$$r(y_i) = \frac{y_i - \hat{\pi}_i}{\sqrt{\hat{\pi}_i \cdot (1 - \hat{\pi}_i)}}, \quad i = 1,2,\ldots,2^L, \quad (8)$$

wobei y_i die Beobachtungen zum gleichen Merkmalsvektor $\mathbf{x}_i$ darstellt. Hier führen Werte zwischen 0,5 und 1 zur konkreten Analyse der jeweiligen Fälle.

Klassifizierung. Die logistische Regression schätzt die Wahrscheinlichkeit π_i, d.i. ein Fall gehört zur ersten Gruppe (: $y=1$). Es bietet sich an, Fälle mit Wahrscheinlichkeiten $\geq 0{,}5$ der ersten Gruppe und Fälle mit Wahrscheinlichkeiten < 0,5 der zweiten Gruppe zuzuordnen. Durch Vergleich mit der beobachteten Gruppenzugehörigkeit lässt sich die Praxistauglichkeit des Modells beurteilen. Dabei ist angeraten, die Fälle die nicht entsprechend der beobachteten Gruppenzugehörigkeit zugeordnet werden, genauer zu untersuchen. Sollten beispielsweise die falschen Zuordnungen vorwiegend bei knappen Entscheidungen eingetreten sein, so ließe sich die Klassifikationsgrenze von 0,5 abändern.

11.2.1.2 Verfahren und Struktur der Modellinterpretation

Plausibilität des Modells. Der logistische Verlauf liefert eine hohe interpretatorische Plausibilität. Da die Steigung im Wendepunkt der logistischen Funktion maximal ist, ist die Wahrscheinlichkeit π_i in der Nähe des Wendepunktes sehr großen Änderungen unterworfen. Ein für die Auswertung der Testaufgaben zentrales Beispiel mag die Bedeutung erläutern. Eine sehr erfolgsverwöhnte Schülerin (unabhängige Variable 1) wird auch bei einer kleinen Anzahl von Hindernissen (unabhängige Variable 2) weiter an der Lösung einer Aufgabe arbeiten und hat damit eine größere Aussicht, die Aufgabe korrekt zu lösen, während eine durchschnittliche Schülerin bei einer gewissen Anzahl von Hindernissen eher den Zweck weiterer Lösungsbemühungen in Frage stellt und eine Schülerin mit vielen Misserfolgen in der Regel bei der kleinsten Schwierigkeit ihre Bemühungen einstellt.

Odd Ratio. Aufgrund des logistischen Verlaufs lässt sich anhand der β-Werte erst einmal nur etwas über die Richtung des Einflusses sagen. Bei positiven Werten von β wird die entsprechende Ausprägung der abhängigen Variable unterstützt ($y=1$), bei negativen Werten der jeweilige Referenzwert. Um über die Wirkungsrichtung hinaus Aussagen zu erhalten, muss man weitere mathematische Modifikationen vornehmen. Eine Möglichkeit liegt in der oben beschriebenen Interpretation der odd ratio für jede unabhängige Variable. Ist die odd ratio größer als 1, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $y=1$ und ist die odd ratio kleiner als 1, sinkt die Wahrscheinlichkeit entsprechend.

Analysestruktur. Damit bietet sich die folgende Struktur des Vorgehens innerhalb der Testauswertung an:

(1) Formulierung der jeweils zur untersuchenden Fragestellungen
(2) Auswahl der Variablen
   - i) Berücksichtigung der Variablen, die relevant zur Beantwortung von (1) sind
   - ii) Kollinearitätsanalyse aller in Frage kommenden Variablen
   - iii) Untersuchung der Korrelationen zwischen den Variablen und den jeweiligen Aufgaben
   - iv) Berücksichtigung weiterer Variablen entsprechend relevanter Korrelationen aus (iii)
   - v) Auswahl der Variablen unter Berücksichtigung von (ii), (iii) und (1) bzw. Zuordnung der Variabeln zu verschiedenen Modellen[145]

[145] Unter Modell wird hier die Modellgleichung der logistischen Regression und alle berücksichtigten Variablen verstanden. So liegen beispielsweise zwei unterschiedliche Modelle vor, wenn eine Variable entfernt wird.

(3) Untersuchung der Modelle
   i) Gesamtmodell
   ii) Ausreißerdiagnostik und gegebenenfalls Reduzierung des Modells
   iii) Modifizierung der Modelle unter Berücksichtigung von Wechselwirkungen
(4) Interpretation der Ergebnisse

11.2.2 Homogenitätsanalyse[146]

Bei der in diesem Abschnitt beschriebenen Homogenitätsanalyse werden kategoriale Daten quantifiziert. Ziel ist es Beziehungen zwischen mehreren kategorialen Variablen in niedrigdimensionalen Räumen zu beschreiben. Die gewünschte Dimensionsreduktion bei minimalem Informationsverlust wird durch ein der linearen Hauptkomponentenmethode (LPCA) analogem Verfahren gewonnen. Deswegen wird dieses Verfahren auch oft als *kategoriale Hauptkomponentenanalyse* bezeichnet.[147] Es werden orthogonale Dimensionen bestimmt, die die Kategorien der Variablen optimal diskriminieren. Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, zugleich die Kategorien der Variablen zu quantifizieren und die Dimensionen derart zu bestimmen, dass die Summe der quadrierten Korrelationen zwischen den Dimensionen und den durch Quantifizierung transformierten Variablen maximal wird. Die transformierten Kategorien verfügen über eine maximale Varianz. Zu jeder Dimension lässt sich ein Diskriminationsmaß bestimmen, das analog der quadrierten Ladung bei der LPCA interpretiert werden kann. Der zugehörige Algorithmus ist iterativ und modelliert abwechselnd die Dimensionen und die transformierten Variablen. Deswegen ist sein Name auch HOMALS (***HOM****ogenity* *Analysis by* ***A****lternating* ***L****east* ***S****quares*).

Dieses im Folgenden beschriebene Verfahren wurde von einer Gruppe von Statistikerinnen und Statistikern in Leiden (Holland) entwickelt und 1990 unter dem Pseudonym GIFI veröffentlicht. Dieser Abschnitt befasst sich im ersten Teil mit dem mathematischen Modell dieses Verfahrens und anschließend wird eine kurze Erläuterung zur Interpretation der Werte gegeben. Ausführlich werden die Interpretationsmöglichkeiten jedoch erst während der konkreten Testauswertung diskutiert.

11.2.2.1 Modellbeschreibung

Gegeben sind m kategoriale Variablen und N beobachtete Fälle. Jede der Variablen besitzt k_υ, $\upsilon \in \{1,\ldots,m\} =: M$, $0/1$ kodierte Ausprägungen bzw. Kategorien. Ziel ist es, eine niedrigdimensionale Darstellung zu finden, die möglichst wenig Informationsverlust beinhaltet und eine Interpretation der Daten erlaubt. Dazu wird angenommen die m Variablen ließen sich durch p Dimensionen modellieren, so dass Fälle und Variabeln sich im $\mathbb{R}^p$ darstellen lassen. Hinsichtlich der Interpretierbarkeit wäre eine Darstellung im $\mathbb{R}^2$ oder im $\mathbb{R}^3$ natürlich ideal.

Die kategorialen Variablen werden in Indikatormatrizen G_υ kodiert, die zu jeder der k_υ verschiedenen Ausprägungen der Variablen υ eine Spalte und zu jedem Fall eine Zeile enthält: $G_\upsilon(s,t) = 1$, $s = 1,\ldots,N$, $t = 1,\ldots,k_\upsilon$, falls Fall s zur Kategorie t gehört und sonst

146 Die nochfolgenden Ausführungen sind angelehnt an BALTES-GÖTZ (1999), MEULMAN et al. (1999), GIFI (1990) und MICHAILIDIS & DE LEEUW (1998).
147 Das Modell der Standard-Hauptkomponentenmethode wird als bekannt vorausgesetzt.

$G_\upsilon(s,t)=0$. Die gesuchte optimale Darstellung im $\mathbb{R}^p$ wird erreicht durch Lösung des folgenden Minimierungsproblems

$$\sigma(X,Y) \xrightarrow{!} \min$$

$$\text{mit: } \sigma(X,Y) := \frac{1}{m}\sum_{\upsilon=1}^{m} \boldsymbol{SSQ}(X - G_\upsilon Y_\upsilon) = \frac{1}{m}\boldsymbol{tr}(X - G_\upsilon Y_\upsilon)'(X - G_\upsilon Y_\upsilon), \qquad (9)$$

wobei $Y := (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ und $\boldsymbol{SSQ}(G)$ die Summe der Quadrate der Matrixelemente von G bezeichnet. Die gesuchte Matrix X ist eine $N \times p$ Matrix und $Y_\upsilon, \upsilon \in M$, sind geeignete zu bestimmende $k_\upsilon \times p$ Gewichtsmatrizen. Die p Spalten von X bzw. Y_υ geben die Koordinaten der Fälle bzw. der Kategorien im $\mathbb{R}^p$ an. Man nennt X die Objektscore-Matrix und Y_υ die quantifizierten Kategorien-Matrizen.

Die Lösung des Minimierungsproblem liefert insofern eine optimale Darstellung, als (9) den durchschnittlichen euklidischen Abstand zwischen den Objekt-Punkten und den durch Y transformierten Kategorienpunkten über alle Variablen υ im $\mathbb{R}^p$ minimiert. Die Funktion σ wird auch als die *Verlustfunktion* bezeichnet.

Der Leitgedanke des ALS-Algorithmus (*Alternating Least Squares*) besteht nun darin, abwechselnd X und Y zu bestimmen, so dass σ minimiert wird. Dazu werden noch folgende Bedingungen formuliert:

$$X'X = NI_p \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{1}'X = 0 \qquad (11)$$

Die Bedingung (10) verhindert die triviale Lösung $X=0$ und $Y_\upsilon = 0$ für jedes $\upsilon \in M$. Zusätzlich lässt sie die einzelnen Spalten von X bzw. Dimensionen orthogonal zueinander stehen und normiert die quadrierte Länge der Objektscores, das sind die Werte der Spalten von X, auf die Länge N. Die zweite Bedingung entspricht einer Forderung nach Zentriertheit hinsichtlich der Darstellung im $\mathbb{R}^p$.

Im ersten Schritt des ALS-Algorithmus wird eine Startmatrix X vorgegeben, wobei X die Bedingungen (10) und (11) erfüllen muss. Dann wird σ hinsichtlich Y minimiert. Es gilt

$$D_\upsilon Y_\upsilon = G_\upsilon' X,\ \upsilon \in M, \qquad (12)$$

wobei $D_\upsilon = G_\upsilon' G_\upsilon$. Die Diagonalmatrix D_υ enthält in der Diagonalen die Fallzahlen, das sind Fälle mit Kodierung 1, zu den einzelnen Kategorien der Variablen υ. Dementsprechend erhält man als neue Quantifizierung der Kategorien der Variable υ:

(1) $$\widetilde{Y}_\upsilon = D_\upsilon^{-1} G_\upsilon' X,\ \upsilon \in M \qquad (13)$$

Damit erhält man als neue Quantifizierung $\widetilde{Y}_\upsilon$ der Kategorien der Variable υ bzgl. der gegebenen Matrix X den Vektor $\widetilde{Y}_\upsilon = (\widetilde{Y}_{\upsilon_1}, \widetilde{Y}_{\upsilon_2}, \ldots, \widetilde{Y}_{\upsilon_{k_\upsilon}})$, wobei die s-te Komponente von $\widetilde{Y}_{\upsilon_t}$ mit $t = 1, \ldots, k_\upsilon$ die Mittelwerte der durch die s-te Spalte von X gegebenen Objektscores in der Kategorie t sind. Diese Minimierung ist aber nichts anderes als die Maximierung der Summe aller quadrierten Korrelationen der Objektscores und den durch Y_υ transformierten Ausgangsvariablen. Damit wird die Hauptkomponenten so bestimmt, dass sie über alle Variablen hinweg die Unterschiede zwischen den Kategorien maximal werden lässt.

Im zweiten Schritt wird (9) mit der in (13) bestimmten Matrix $\widetilde{Y}$ hinsichtlich X minimiert. Man erhält dann als neue Objektscore-Matrix

(2) $$\widetilde{X} = \frac{1}{m}\sum_{\upsilon=1}^{m} G_\upsilon \widetilde{Y}_\upsilon \,. \qquad (14)$$

Dies ist gerade die Mittelwert der Quantifizierungen aller Kategorien, denen das Objekt angehört.

Im dritten Schritt (3) werden die Spalten von $\widetilde{X}$ zentriert und orthonomalisiert, so dass die Bedingungen (10) und (11) wiederum erfüllt sind. Der ALS-Algorithmus wiederholt die Schritte (1) bis (3) solange, bis dieser konvergiert.

Durch die Schritte (1) und (2) erhalten wir eine Darstellung der Objekte und Kategorien, in der die Objekte möglichst nahe den Kategorien repräsentiert werden, denen sie zugehören und die Kategorien sind nahe den Objekten, die zu ihnen gehören. Zugleich wird der Abstand zwischen den Kategorien einer Variablen größtmöglichst diskriminiert. Dieses Verfahren in der Anwendung auf die Indikatormatrix G wird auch als *reziproke Mittelwertbildung* bezeichnet.

Seien $\widehat{X}$ und $\widehat{Y}$ die aus dem ALS-Algorithmus gewonnenen Matrizen. Die Spalten von $\widehat{X}$ nennt man die Hauptkomponenten. Die Bedingungen (10) und (13) erlauben die Umformung der Verlust-Funktion:

$$\sigma(\widehat{X}, \widehat{Y}) = Np - \frac{1}{m}\sum_{\upsilon=1}^{m} \boldsymbol{tr}(\widehat{Y}_\upsilon D_\upsilon \widehat{Y}_\upsilon). \qquad (15)$$

Somit lässt sich für jede Dimension $s \in \{1, \ldots, p\}$ und jede Variable υ das Diskriminationsmaß $\eta_{\upsilon s}$ mit

$$\eta_{\upsilon s} = \frac{1}{N}\widehat{Y}_\upsilon(\cdot, s) D_\upsilon \widehat{Y}_\upsilon(\cdot, s) \qquad (16)$$

definieren. Geometrisch geben die Diskriminationsmaße den durchschnittlichen quadrierten Abstand der Kategorienquantifikationen zum Ursprung des $\mathbb{R}^p$ an. Weiterhin entsprechen die Diskriminationsmaße der quadrierten Korrelation zwischen der Hauptkomponente der Dimension s und der optimal quantifizierten Variable $G_\upsilon \widehat{Y}_\upsilon(.,s)$.

Somit lässt sich (15) auch schreiben als

$$N(p - \frac{1}{m}\sum_{\upsilon=1}^{m}\sum_{s=1}^{p}\eta_{\upsilon s}^2) = N(p - \sum_{s=1}^{p}\gamma_s), \qquad (17)$$

wobei $\gamma_s := \frac{1}{m}\sum_{\upsilon=1}^{m}\eta_{\upsilon s}^2, s = 1, \ldots, p$, als Eigenwerte bzgl. der Dimensionen s bezeichnet werden. Da die Minimierung der Verlustfunktion auch als eine Maximierung des Mittelwertes der Diskriminationsmaße begriffen werden kann, wird der Eigenwert auch als Gütemaß des Modells in der Dimension s angesehen. Aufgrund der Definition variiert dieser im

Intervall $[0,1]$. Die erste Dimension hat den größten Eigenwert. Das bedeutet, sie trennt besser als alle anderen Dimensionen zwischen den Kategorien.

11.2.2.2 Interpretation des Modells

Nachfolgend werden die wesentlichen Eigenschaften der Darstellung des HOMALS-Modells im p-dimensionalen Raum diskutiert. Da in der Analyse vorwiegend $p=2$ gilt, muss berücksichtigt werden, dass von den genannten Eigenschaften einige natürlich auch erst in höheren Dimensionen auftreten können. Da jedoch die Eigenwerte ihrer Größe nach geordnet sind, tragen die ersten beiden Eigenwerte normalerweise zu einen Großteil der Varianzaufklärung bei. Deswegen mag in diesen Fällen eine Interpretation der ersten beiden Dimensionen genügen.

- Die Fälle und Variablen können in einem gemeinsamen Raum dargestellt werden. Dabei ist ein Kategoriepunkt Zentrum aller Objektpunkte, die dieser Kategorie angehören.
- Fälle mit demselben Profilen, d.h. mit demselben Wahl- oder Lösungsverhalten, erhalten auch dieselben Scores (vgl. (14)). Damit lässt sich die „Ähnlichkeit“ von zwei Objekten anhand ihres Abstandes interpretieren.
- Je weiter die Kategorienpunkte einer Variable voneinander entfernt liegen, desto besser diskriminiert die jeweilige Variable (vgl. (16)).
- Objekte mit durchschnittlichen Werten liegen in der Nähe des Ursprungs, während Ausreißer weiter entfernt zu finden sind (vgl. (13)).
- Die Kategorienquantifikationen jeder Variablen υ ergeben in der Summe den Wert Null.
- Das HOMALS-Modell liefert *eingebettete* Lösungen, das heißt, dass bei Vergleich von zwei Lösungen mit verschiedenen Dimensionen ($p_1 > p_2$) die ersten p_2 Lösungen der p_1 Lösungen im höherdimensionierten Modell identisch sind.

11.3 Testauswertung

Die Analyse des Tests befasst sich zuerst mit den Einflussvariablen auf das Lösungsverhalten bei den einzelnen Aufgaben. Aus dem Grund werden zuerst alle relevanten Variablen und deren Verwendung innerhalb der Untersuchung vorgestellt. Anschließend folgt eine Korrelationsanalyse der unabhängigen Variablen und die Darstellung der Lösungshäufigkeiten bei den Aufgaben in Abhängigkeit von der Variablenkategorie. Dies dient dazu neue Fragen aufzuwerfen bzw. die alten Fragen zu erneuern. Aufgrund von Korrelationen und dem Vergleich schlichter Häufigkeitstabellen kann natürlich keine Hypothese verworfen werden.

Daran anschließend werden mit Hilfe der logistischen Regression die Einflüsse der Variablen auf das Lösungsverhalten untersucht. Mit Hilfe der Homogenitätsanalyse lassen sich dann die Aufgaben, bei denen sich besondere Einflüsse beobachten lassen, niedrigdimensional darstellen.

Die folgende Darstellung liefert eine Übersicht über die das geplante Vorgehen:

1. Darstellung der Variablen
2. Darstellung der Lösungshäufigkeiten
3. Korrelationsanalyse
4. Logistische Regression zur Bestimmung relevanter Einflussfaktoren auf das Lösungsverhalten
5. Homogenitätsanalyse zur Exploration von Ähnlichkeiten unter den Aufgaben
6. Abschließende Diskussion der relevanten Einflussfaktoren

11.3.1 Darstellung der Variablen

Da die Lernumgebung als von der Lehrperson vorgegeben gesetzt wird, kommen als Einflussfaktoren alle Variablen in Frage, die in dem Fragebogen zu dem Test unter den Punkten I.1 – I.4 abgefragt wurden (vgl. Anhang 15.1.2). Die Variable I.3 ist im strengen Sinn nur für den Vergleich der KLIP-Kurse mit den Kontrollkursen anwendbar. Deswegen ist sie für die Untersuchung der Gesamtpopulation nur von sekundärem Interesse. Diese Variablen werden ergänzt durch die Variablen der Kursart, der Schulform, der Schule und des Computereinsatzes. Variablen wie beispielsweise der Werkstattunterricht oder die Gruppenarbeit müssen nicht gesondert untersucht werden, da sie aus Lehrpersonenperspektive identisch mit der Variable „Teilnahme am Unterrichtsversuch" sind, wohingegen die Variable des Computereinsatzes eine engere Population umfasst, da einer der Leistungskurse (LKUO) in KLIP ohne Computer gearbeitet hat (vgl. Abschnitt 9.3). Die in Abschnitt 11.1.1.1 und in Tabelle 15-1 dargestellten Abweichungen von dieser Setzung der Lernumgebung seitens der Schüler und Schülerinnen werden in die Interpretation eingehen.

Übersicht über die Variablen und deren Einteilung. Die Analyse des Tests unterscheidet zwei Konstellationen[148].

In der **ersten Konstellation** wird die Gesamtpopulation (n=119) untersucht. Sie beinhaltet maximal die nachfolgend aufgeführten unabhängigen Variablen Kursart (**k**), Geschlecht (**g**), Schule (**s**), Schulform (**sf**), Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**), Note auf dem letzten Halbjahreszeugnis (**nlh**), Interesse am Mathematikunterricht (**i**) und Computereinsatz (**r**) und die abhängige Variable „Verständnis der Aufgabe i" (**vai**)[149] ein.

[148] Der Begriff Konstellation bezieht sich auf eine bestimmte Population, die in die Untersuchung einbezogen werden kann. In Abgrenzung dazu versteht man unter einem Modell das verwendete statistische Modell inklusive der untersuchten Variablen.
[149] Eine inhaltliche Interpretation der Variable **vai** wird bei der Erläuterung der jeweiligen Aufgabe vorgenommen.

Tabelle 11-2. Variablenübersicht

Variable/Kodierung	1	2	3	4
Kursart (**k**)	GK	LK	-	-
Geschlecht (**g**)	Junge	Mädchen	-	-
Schule (**s**)	A	B	C	D
Schulform (**sf**)	Gesamt-schule	Gymnasium	-	-
Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**)	Nein	Ja	-	-
Note auf dem letzten Zeugnis (**nlh**)	schwach	durchschnittlich	gut	
Interesse am Mathematikunterricht (**i**)	ungern	teils teils	gern	
Computereinsatz (**r**)	Nein	Ja		
„Verständnis der Aufgabe i" (**vai**)	Nein	Ja		

Die Ausprägungen der Variablen **nlh** und **i** wurden entsprechend der in Abschnitt 11.1.1 diskutierten Verwendbarkeit der Variablen auf drei Ausprägungen reduziert. Die Variablen **u** und **r** werden aufgrund sehr hoher Korrelationen getrennt untersucht (vgl. Tabelle 11.4).

In der **zweiten Konstellation** werden ausschließlich die beiden Schulen, an denen jeweils Kontrollklassen existierten, untersucht. Dies lässt aussagekräftige Ergebnisse hinsichtlich der Variablen **k** und **u** vermuten.[150]

Die zweite Konstellation wird insbesondere dann in die Untersuchung einbezogen, wenn die Variable **sf** signifikant auf eine Trennung der Gruppen[151] in der abhängigen Variable hinweist. Im Fall einer vollständigen Gruppentrennung, d.h. für alle Fälle einer Kategorie gilt $\pi_i = 0$ oder $\pi_i = 1$, ist bekanntlich überhaupt keine Modell-Schätzung möglich. Dann wird die Variable, in der diese Gruppentrennung aufgetreten ist, aus dem Modell entfernt und ein Vergleich erfolgt anhand der relativen Häufigkeit für die Zugehörigkeit zu einer der beiden Gruppen in der abhängigen Variable.

Es werden entweder nur einflussreiche Variablen in ein Modell innerhalb der jeweiligen Konstellationen integriert oder solche Variablen, die von besonderem Forschungsinteresse sind und deren nichtvorhandene Einflussnahme gezeigt werden kann. Wechselwirkungen innerhalb der Modelle werden durch die sogenannte Methode der Vorwärtsselektion getestet.

Das Analysevorgehen vollzieht sich in einem Vierschritt, der an dem in 11.2.1 beschriebenen Verfahren der logistischen Regression orientiert ist: Im ersten Schritt wird im Zusammenhang mit der jeweiligen Aufgabe das Forschungsinteresse formuliert. Daran anschließend werden die Bedingungen an das Datenmaterial überprüft und die entsprechenden ausgewählten Variablen in den unterschiedlichen Konstellationen mit Hilfe der logistischen Regression beurteilt und zuletzt werden die Ergebnisse der Analyse interpretiert. Der zweite Schritt wird nur dann ausführlich dokumentiert, falls sich Widersprüche zu den Prämissen zeigen. Für die erste Aufgabe wird der zweite Schritt exemplarisch und ausführlich

[150] Hinsichtlich der beiden Konstellationen sind die Werte in den Kollinearitäts- und Korrelationstabellen zu den entsprechenden Variablen zweigeteilt.

[151] Der Begriff der Gruppentrennung bezieht sich ausschließlich auf die abhängige Variable, auch wenn die Kategorien der unabhängigen Variablen ebenfalls als Gruppen bezeichnet werden.

erläutert. Bei den anderen Aufgaben wird zusätzliches Datenmaterial im Anhang B präsentiert. Das in der ersten Aufgabe erläuterte Verfahren wird für alle Aufgaben gleichermaßen durchgeführt, eine analoge ausführliche Darstellung würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Der erste und vierte Schritt werden für alle Aufgaben vollständig durchgeführt.

11.3.2 Zusammenhänge zwischen den Variablen

Die in Abschnitt 11.1.2 aufgeführten Fragen werden im Folgenden hinsichtlich der Abhängigkeit zwischen den unabhängigen und abhängigen Variablen bearbeitet. Zur Untersuchung eines möglichen Zusammenhangs zwischen den einzelnen Variablen werden in einem ersten Schritt die Korrelationen zwischen den Variablen und anschließend die Lösungshäufigkeiten der Aufgaben in Abhängigkeit von den Variablen erörtert.

Da alle für diese Untersuchung interessanten Variabeln entweder dichotomes oder mehrkategoriales Datenniveau besitzen, wird zur Bestimmung der Korrelationen zwischen den dichotomen Variablen der ϕ-Koeffizient und zwischen den mehrkategorialen Variablen der Korrelationskoeffizient nach SPEARMAN verwendet. Hinsichtlich des Spearmanschen Korrelationskoeffizienten wird den dichotomen Variablen eine künstliche Rangordnung zugewiesen, die in die Interpretation jedoch nicht einbezogen wird.

Tabelle 11-3. Korrelationsanalysetafel

Variablen 1	⟷ Variablen 2	Korrelation
Interesse	Kursart	**0,485 (0,01)**
Interesse	Note I.H.	**0,369 (0,01)**
Interesse	Geschlecht	**-0,203 (0,05)**
Interesse	Teiln. am UV	0,091
Interesse	Computereinsatz	-0,180
Kursart	Geschlecht	**-0,287 (0,01)**
Kursart	Teiln. am UV	-0,10
Kursart	Computereinsatz	**-0,408 (0,01)**
Kursart	Note I. H.	**0,310 (0,01)**

Variablen 1	⟷ Variablen 2	Korrelation
Geschlecht	Note I.. H.	0,037
Geschlecht	Teiln. am UV	0,071
Geschlecht	Computereinsatz	0,139
Note I. H.	Teiln. am UV	0,099
Note I. H.	Computereinsatz	-015
Computereinsatz	Teiln. am UV	**0,669 (0,01)**

Der in Abschnitt 11.1.1 entdeckte Zusammenhang zwischen den Variablen Kursart und Interesse wird durch eine signifikante[152] Korrelation von 0,485 bekräftigt. Das bedeutet, dass Leistungskurszugehörigkeit und positives Interesse am Fach Mathematik korrelieren. Hinzu kommen signifikante Zusammenhänge zwischen den Variablen Kursart und Note und den Variablen Note und Interesse, so dass während der Testauswertung dieses Triumvirat gesondert berücksichtigt werden muss. Das Geschlecht ist sowohl mit der Kursart als auch mit dem Interesse negativ korreliert und mit der Note gar nicht korreliert. Dies ließe sich so interpretieren, dass mehr Jungen einen Leistungskurs wählen und mehr Interesse an dem Fach Mathematik zeigen. Die erste Interpretation ist problematisch, da die Grund- und Leistungskurse von verschiedenen Schulen stammen. Die Korrelation zwischen Note und der Teilnahme am Unterrichtsversuch ist hingegen sehr niedrig, was gegen den oben

[152] Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,01 signifikant (2-seitig).

vermuteten Zusammenhang spricht, dass in den KLIP-Kursen die besseren Schüler und Schülerinnen sind (vgl. Abschnitt 11.1.1). Trotzdem können natürlich in speziellen Konstellationen starke Abhängigkeiten auftreten, so dass auch dieser Zusammenhang besonders berücksichtigt werden muss. Auffällig sind die Korrelationen im Zusammenhang mit dem Computereinsatz. Zum einen wird der Computer mehr in Grundkursen als in Leistungskursen benutzt.[153] Zum anderen haben bis auf einen KLIP-Kurs alle am Unterrichtsversuch beteiligten Kurse einen Computer zur Verfügung gehabt, für die Kontrollkurse wird ein computerfreier Unterricht angenommen. Das drückt sich in der signifikanten Korrelation von 0,669 aus. Diesem Zusammenhang wird im Weiteren besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden müssen.

11.3.3 Analyse relevanter Einflussfaktoren auf die einzelnen Aufgaben

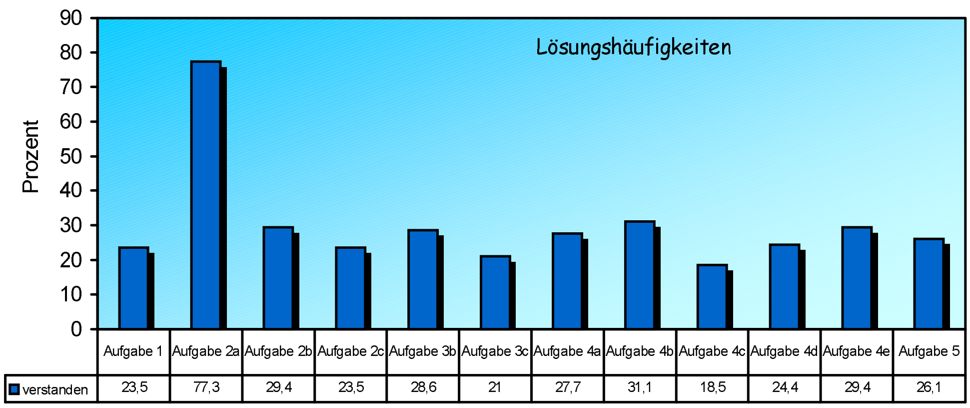
Mögliche Einflüsse der in dem Test abgefragten Variablen auf die Lösungswahrscheinlichkeit der einzelnen Aufgaben sollen in diesem Abschnitt behandelt werden. Zur Analyse wird das Verfahren der logistischen Regression verwendet. Am Beispiel der ersten Aufgabe wird das Verfahren exemplarisch vorgeführt.

Zur Ermittlung von Abhängigkeiten der Variablen Kursart, Teilnahme am Unterrichtsversuch, Note im letzten Halbjahr, Interesse und den Lösungshäufigkeiten werden in einem ersten Schritt die relativen Lösungshäufigkeiten dargestellt und diskutiert. Daran anschließend wird eine Multikollinearitätsuntersuchung durchgeführt. Die Ergebnisse beider Untersuchungen werden in die Einzelanalysen der Aufgaben einbezogen.

Lösungshäufigkeiten. Die relativen Häufigkeiten zum Lösungsverhalten bei den einzelnen Aufgaben (**vai**) sollen Zusammenhänge explorieren, die zusammen mit den Fragestellungen des ersten Teils dieser Arbeit die Variablenauswahl innerhalb des Modells der logistischen Regression beeinflussen sollen. Die Aufgaben des Tests sind hierfür weiter unterteilt worden, so dass nicht die Aufgaben 1 bis 5 dargestellt, sondern alle Teilaufgaben, wodurch eine Anzahl von insgesamt zwölf Aufgaben erörtert werden.[154]

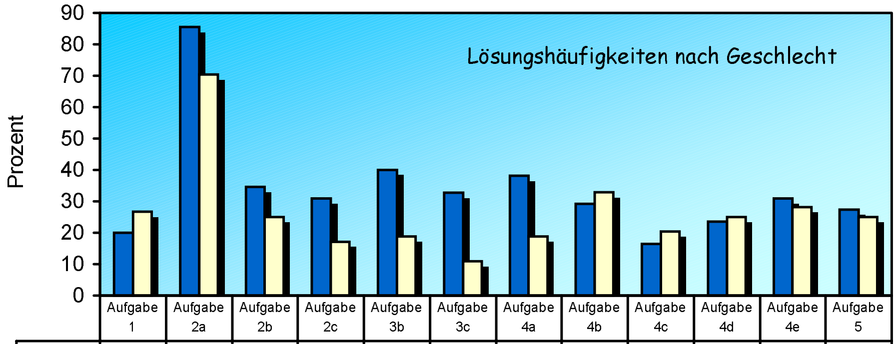
In Abbildung 11.2 sind die relativen Häufigkeiten der Variablen **vai**, „die Schülerin bzw. der Schüler hat die Aufgabe und die Lösung inhaltlich verstanden", für die gesamte Population dargestellt.

Abbildung 11.2. Lösungshäufigkeiten für die gesamte Population (n=119)



153 Das Verhältnis ist in den Grundkursen 2:1 und in den Leistungskursen 1:2.
154 Die Aufgabe 3a wird nicht in die Untersuchung einbezogen (vgl. 11.1.2).

Abbildung 11.3. Lösungshäufigkeiten nach Geschlecht (n=119)

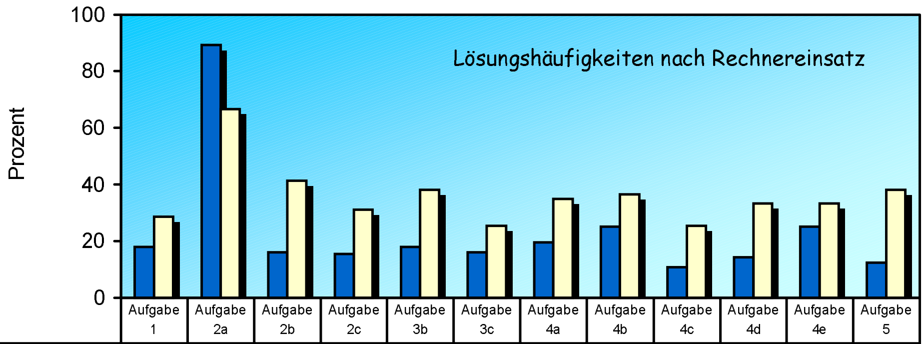


	Aufgabe 1	Aufgabe 2a	Aufgabe 2b	Aufgabe 2c	Aufgabe 3b	Aufgabe 3c	Aufgabe 4a	Aufgabe 4b	Aufgabe 4c	Aufgabe 4d	Aufgabe 4e	Aufgabe 5
Jungen	20	85,5	34,5	30,9	40	32,7	38,2	29,1	16,4	23,6	30,9	27,3
Mädchen	26,6	70,3	25	17,2	18,8	10,9	18,8	32,8	20,3	25	28,1	25

Die Abbildung 11.3 zeigt, dass die Aufgaben 2a bis 4a mit einer deutlichen Tendenz von den Jungen besser gelöst werden, wohingegen bei allen anderen Aufgaben ein ausgeglichenes Verhältnis bis zu einem leichtem Vorteil für die Mädchen zu erkennen ist.

Abbildung 11.4 zeigt die relativen Lösungshäufigkeiten in Abhängigkeit vom Computereinsatz (**r**). Diese Variable unterscheidet sich von der Variable Unterrichtsversuchsteilnahme (**u**) durch den Kurs LKUO, der als einziger Kurs ohne Computereinsatz an KLIP teilgenommen hat. Bei allen Aufgaben, ausgenommen der Aufgabe 2a, ist ein zum Teil starkes Übergewicht der Kurse mit Computereinsatz zu beobachten. Damit liegt hier ein möglicher Einflussfaktor auf das Lösungsverhalten vor. Inwieweit dieser Faktor vom Faktor **u** zu separieren ist, wird Gegenstand der weiteren Analyse.

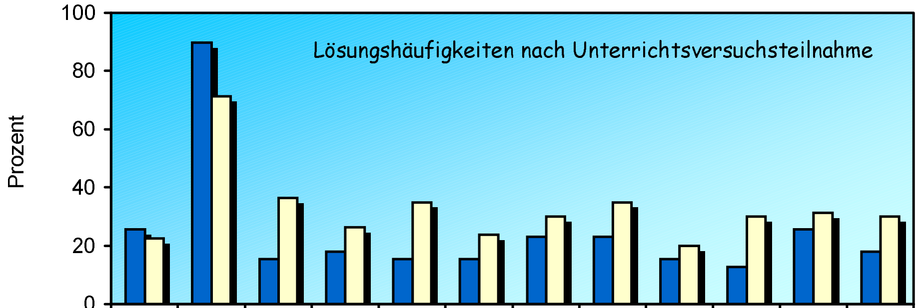
Abbildung 11.4. Lösungshäufigkeiten nach Computereinsatz (n=119)



	Aufgabe 1	Aufgabe 2a	Aufgabe 2b	Aufgabe 2c	Aufgabe 3b	Aufgabe 3c	Aufgabe 4a	Aufgabe 4b	Aufgabe 4c	Aufgabe 4d	Aufgabe 4e	Aufgabe 5
Kein Rechnereinsatz	17,9	89,3	16,1	15,5	17,9	16,1	19,6	25	10,7	14,3	25	12,5
Rechnereinsatz	28,6	66,7	41,3	31,1	38,1	25,4	34,9	36,5	25,4	33,3	33,3	38,1

In der nächsten Grafik werden die Lösungshäufigkeiten in Abhängigkeit von der Unterrichtsversuchsteilnahme dargestellt. Bei den ersten beiden Aufgaben zeigen sich die Schülerinnen und Schüler, die nicht an KLIP teilgenommen haben, stärker, ansonsten liegen die Lösungshäufigkeiten bei den KLIP-Kursen höher.

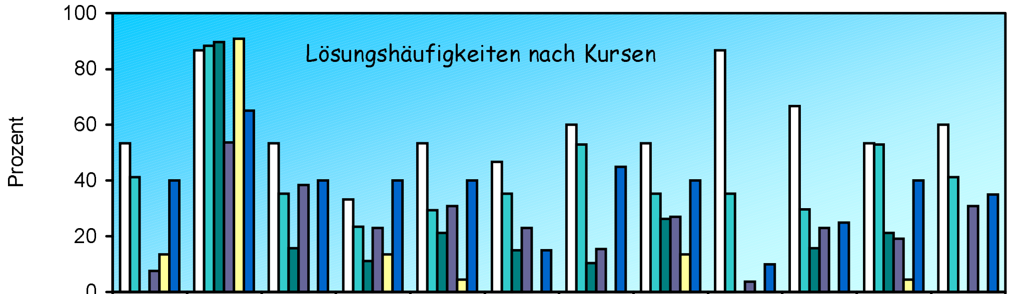
Abbildung 11.5. Lösungshäufigkeiten nach Unterrichtsversuchsteilnahme (n=119)



	Aufgabe 1	Aufgabe 2a	Aufgabe 2b	Aufgabe 2c	Aufgabe 3b	Aufgabe 3c	Aufgabe 4a	Aufgabe 4b	Aufgabe 4c	Aufgabe 4d	Aufgabe 4e	Aufgabe 5
nicht teilgenommen	25,6	89,7	15,4	17,9	15,4	15,4	23,1	23,1	15,4	12,8	25,6	17,9
teilgenommen	22,5	71,3	36,3	26,3	35	23,8	30	35	20	30	31,3	30

In Abbildung 11.6 wird die Variable **vai** in Abhängigkeit von den Kursen dargestellt. Dies ermöglicht einen ersten Vergleich zwischen den Kursen mit ihren Kontrollkursen. So lässt sich bei Aufgabe 1 zwar ein Übergewicht des Leistungskurses LKUC gegenüber dem Kontrollleistungskurs LKOO erkennen, jedoch ist dieses Verhältnis bei den Grundkursen GKUC1 und GKOO1 genau entgegengesetzt. Bei den Aufgaben 2a und 4e ist die Leistung in den beiden Leistungskursen vergleichbar, bei den anderen Aufgaben jedoch ist eine Dominanz des KLIP-Kurses LKUC ablesbar. Im Grundkursbereich zeigt der GKOO1 bei den ersten beiden Aufgaben die höheren Lösungshäufigkeiten, bei allen anderen Aufgaben lösen jedoch die Schülerinnen und Schüler des KLIP-Kurses GKUC1 die Aufgaben im Verhältnis wesentlich besser.

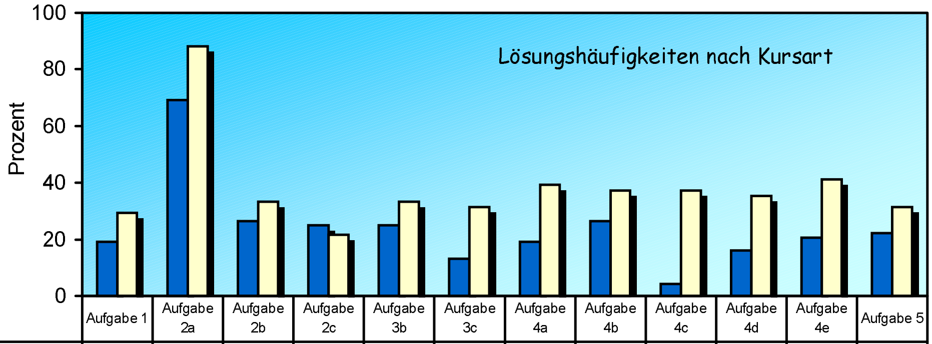
Abbildung 11.6. Lösungshäufigkeiten nach Kursen (n=119)



	Aufgabe 1	Aufgabe 2a	Aufgabe 2b	Aufgabe 2c	Aufgabe 3b	Aufgabe 3c	Aufgabe 4a	Aufgabe 4b	Aufgabe 4c	Aufgabe 4d	Aufgabe 4e	Aufgabe 5
LKUC	53,3	86,7	53,3	33,3	53,3	46,7	60	53,3	86,7	66,7	53,3	60
LKOO	41,2	88,2	35,3	23,5	29,4	35,3	52,9	35,3	35,3	29,7	52,9	41,2
LKUO	0	89,5	15,8	11,1	21,1	15	10,5	26,3	0	15,8	21,1	0
GKUC1	7,7	53,8	38,5	23,1	30,8	23,1	15,4	26,9	3,8	23,1	19,2	30,8
GKOO1	13,6	90,9	0	13,6	4,5	0	0	13,6	0	0	4,5	0
GKUC2	40	65	40	40	40	15	45	40	10	25	40	35

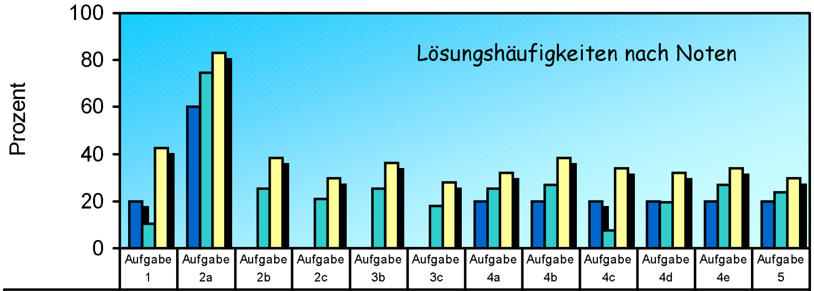
Zudem wird durch die Abbildung die besondere Stellung des Leistungskurses LKUO sichtbar. Lediglich in Aufgabe 2a werden dort Leistungen gezeigt, die mit den anderen beiden Leistungskursen vergleichbar wären. Ansonsten nimmt der Kurs fasst immer einen der beiden letzten Plätze ein. Trotzdem ist bei den Lösungshäufigkeiten bezüglich der Kursart ein deutliches Übergewicht der Leistungskurse zu erkennen (vgl. Abbildung 11.7).

Abbildung 11.7. Lösungshäufigkeiten nach Kursart (n=119)



	Aufgabe 1	Aufgabe 2a	Aufgabe 2b	Aufgabe 2c	Aufgabe 3b	Aufgabe 3c	Aufgabe 4a	Aufgabe 4b	Aufgabe 4c	Aufgabe 4d	Aufgabe 4e	Aufgabe 5
Grundkurs	19,1	69,1	26,5	25	25	13,2	19,1	26,5	4,4	16,2	20,6	22,1
Leistungskurs	29,4	88,2	33,3	21,6	33,3	31,4	39,2	37,3	37,3	35,3	41,2	31,4

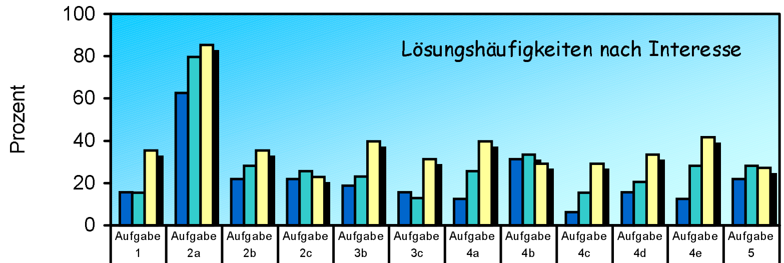
Abbildung 11.8. Lösungshäufigkeiten innerhalb einer Notenkategorie (n=119)



	Aufgabe 1	Aufgabe 2a	Aufgabe 2b	Aufgabe 2c	Aufgabe 3b	Aufgabe 3c	Aufgabe 4a	Aufgabe 4b	Aufgabe 4c	Aufgabe 4d	Aufgabe 4e	Aufgabe 5
schwach	20	60	0	0	0	0	20	20	20	20	20	20
durchschnittlich	10,4	74,6	25,4	20,9	25,4	17,9	25,4	26,9	7,5	19,4	26,9	23,9
gut	42,6	83	38,3	29,8	36,2	27,9	31,9	38,3	34	31,9	34	29,8

Die Abbildung 11.8 veranschaulicht die Lösungshäufigkeiten hinsichtlich der Notenverteilung. Dabei wird deutlich, dass die Kategorie „schwach" differiert bezüglich ihres Platzes in der Rangfolge der drei Kategorien. Das liegt daran, dass diese Kategorie nur fünf Schüler und Schülerinnen umfasst. Die Interpretation des Einflusses dieser Kategorie ist damit, wie schon erwähnt, sehr problematisch.

Abbildung 11.9. Lösungshäufigkeiten innerhalb einer Interessenkategorie (n=119)



	Aufgabe 1	Aufgabe 2a	Aufgabe 2b	Aufgabe 2c	Aufgabe 3b	Aufgabe 3c	Aufgabe 4a	Aufgabe 4b	Aufgabe 4c	Aufgabe 4d	Aufgabe 4e	Aufgabe 5
ungern	15,6	62,5	21,9	21,9	18,8	15,6	12,5	31,3	6,3	15,6	12,5	21,9
teils teils	15,4	79,5	28,2	25,6	23,1	12,8	25,6	33,3	15,4	20,5	28,2	28,2
gern	35,4	85,4	35,4	22,9	39,6	31,3	39,6	29,2	29,2	33,3	41,7	27,1

Die Abbildung 11.9 veranschaulicht, wie viel Prozent der Schüler und Schülerinnen aus einer Interessenkategorie die jeweilige Aufgabe inhaltlich verstanden haben und bis auf Rechenfehler richtig lösen konnten

Multikollinearität. Die Untersuchung der Korrelationen zwischen den einzelnen Variablen in Abschnitt 11.3.2 zeigt die Abhängigkeiten zwischen jeweils zwei Variablen. Inwieweit auch Abhängigkeiten zwischen mehreren Variablen bestehen, soll mit der nachfolgenden Kollinearitätsstatistik zu den in der Testauswertung verwendeten Variablen dargestellt werden.[155]

Tabelle 11-4. Kollinearitätsstatistiken

Variablen/Toleranz	G1	G2	G3	G4	G5
Kursart	**0,07**	0,54	**0,07**	0,54	0,54
Note l. H.	0,79	0,80	0,80	0,80	0,81
Computereinsatz	**0,07**	**0,06**			0,73
Teilnahme am UV	**0,07**	**0,07**	0,73	0,84	
Geschlecht	0,85	0,86	0,88	0,88	0,89
Interesse	0,68	0,69	0,69	0,70	0,70
Schule	**0,09**		**0,09**		
Schulform	**0,06**	**0,09**	0,40	0,64	0,66

Variablen/Toleranz	V1
Kursart	0,68
Note l. H.	0,73
Teilnahme am UV	0,94
Geschlecht	0,87
Interesse	0,66

Die von G1 bis G5 durchnummerierten Spalten beschreiben Zusammenhänge zwischen den Variablen innerhalb der ersten Konstellation, das heißt für die **G**esamtpopulation. Die zweite Tabelle enthält die zweite Konstellation, die **V**ergleichskurse, das sind die Kurse LKUC und GKUC1 mit ihren Kontrollkursen. Die Spalten der beiden Tabellen unterscheiden sich durch ihre Zellenbesetzungen.

Die Werte in G1 bis G3 bestätigen den durch die Korrelationskoeffizienten vermuteten Zusammenhang (vgl. Tabelle 11-3), dass eine hohe Multikollinearität jeweils zwischen den beiden Variablen Schule (**s**) und Kursart (**k**) und Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) und Computereinsatz (**r**) bestehen. Die Abhängigkeit zwischen **s** und **k** lässt sich mit der Verteilung der Kurse auf die Schulen begründen: an zwei Schulen gibt es ausschließlich Leistungskurse und an zwei Schulen nur Grundkurse. Im Rahmen der Fragestellungen dieser Arbeit kann auf die Variable **s** bei einem Großteil der Aufgaben verzichtet werden.

Die Variablen **u** und **r** sind hingegen beide von Forschungsinteresse. Die enge Verzahnung von **r** und **u** liegt darin begründet, dass nur für einen Kurs (LKUO) die Ausprägungszuordnung unterschiedlich ist. Aus diesem Grund werden die beiden Variablenpaare *nicht* zusammen in einem Modell untersucht. Zur Berücksichtigung beider Variablen **r** und **u** wird zuerst ein die Variable **u** umfassendes Modell untersucht und anschließend wird in diesem Modell **u** durch **r** substituiert. Danach werden beide Modelle miteinander verglichen. Nach Abzug einer der beiden Variablen erhält man für die verbleibenden Variablen gute Toleranzwerte (vgl. Tabelle 11.4), so dass die in G4 und G5 beschriebenen Variablenzusammenstellung Ausgangspunkt für die Analysen in der ersten Konstellation bilden werden. Die guten Werte bestätigen sich ebenfalls für die zweite Konstellation. Dies gilt des Weiteren für alle anderen Aufgaben.

Forschungsfragen und Hypothesen. Die Analyse des Tests orientiert sich an den im Abschnitt 11.1.2 genannten Forschungsfragen. Somit werden Auswirkungen der Variablen Geschlecht (**g**) und Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) auf das Lösungsverhalten bei allen Aufgaben berücksichtigt und nicht immer explizit erwähnt, es sei denn die Anforde-

[155] Die verwendeten Variablen sind im Abschnitt 11.3.1 erläutert.

rungsniveau einer Aufgabe erfordert besondere Aspekte, die durch diese Variablen abgedeckt werden.

Die Dominanz der Gruppe „Leistungskurs" in der Variable Kursart (**k**), der Gruppe, die sich gern mit Mathematik beschäftigt, und die Schülerinnen und Schüler der Gruppe, die mit einer guten Note im letzten Schuljahr beurteilt wurden, wird auf Basis der Abbildung 11.7, Abbildung 11.8 und Abbildung 11.9 unterstellt. Eine ausführliche Erwähnung oder Begründung dieses Sachverhaltes bei jeder Aufgabe ist damit nicht mehr notwendig.

Neben Zusammenfassungen am Ende der Diskussion jeder Aufgabe werden die relevanten Einflussvariablen in der Tabelle 11.63 in Abschnitt 11.3.4 festgehalten und anschließend weitergehend diskutiert und analysiert.

11.3.3.1 Analyse des Lösungsverhaltens bei Aufgabe 1

Am Beispiel dieser Aufgabe soll exemplarisch das oben beschriebene Analyseverfahren zur Testauswertung vorgestellt werden.

Bei dieser Aufgabe handelte es sich um eine Aufgabe, die sowohl Schülerinnen und Schüler aus Grundkursen als auch Schülerinnen und Schüler aus Leitungskursen lösen können sollten. Sie erforderte ein Verständnis des Flächeninhaltsaspektes der Integralrechnung, ließ sich aber auch rein schematisch mit Hilfen von entsprechenden Kalkülen lösen. Das hier dargelegte Konzept KLIP sieht eine durch die Lehrperson initiierte Behandlung dieses Aufgabentyps nicht vor. Lediglich im Rahmen der Begriffsentwicklung kann es für die Schülerinnen und Schüler notwendig gewesen sein sich den Unterschied von Integral und Fläche deutlich zu machen. Hierzu bestand für jede Schülerin und jeden Schüler natürlich die Möglichkeit, einen Kalkül zur Lösung dieses Aufgabentyps zu entwickeln. Darüber hinaus konnten die Schülerinnen und Schüler in KLIP zur jeder Zeit das Berechnen reiner Kalkülaufgaben dem Computer überlassen. Deswegen ist das in der ersten Aufgabe zu integrierende Polynom nur zweiten Grades. Über die Fähigkeit hinaus, das Polynom korrekt zu integrieren, benötigten die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis des orientierten Flächeninhalts. Eine Aufgabe gilt insofern als richtig verstanden, wenn deutlich wird, dass Integrationsregeln verstanden und anwendbar sind und ein Verständnis des Flächeninhaltsaspektes sichtbar wird. Dabei spielen mögliche Rechenfehler eine untergeordnete Rolle. Wenn darüber hinaus sowohl der Rechenweg als auch das Ergebnis der Rechnung korrekt sind, gilt die Aufgabe als vollständig richtig gelöst.[156]

Forschungsfragen und Hypothesen. Da dieser Aufgabentyp in jedem Lehrbuch zur Integralrechnung enthalten ist, ist anzunehmen, dass die Kontrollkurse sich intensiver als die KLIP-Kurse mit dem Lösen solcher Aufgaben beschäftigt haben. Insofern lässt sich die Hypothese formulieren, dass die Kontrollkurse höhere Lösungswahrscheinlichkeiten bei dieser Aufgabe besitzen. Ferner lässt sich aus naheliegenden Gründen annehmen, dass die Schülerinnen und Schüler eines Leistungskurses besser abschneiden müssten als die eines Grundkurses.

Korrelationen. Die signifikanten Korrelationen der unabhängigen Variablen mit der Variable **va1** deuten in der *ersten Konstellation* auf ein Modell hin, in dem die Variablen **nlh (0,341 (0,01))**[157], **i (0,208 (0,05))** und **sf (0,242 (0,01))** berücksichtigt werden sollten (vgl. Tabelle

---

[156] Da in dieser Arbeit ausschließlich das inhaltliche Verständnis (**vai**) untersucht wird, stimmen im Folgenden Formulierungen wie z.B. „korrekt verstanden", „verstanden", „richtig gelöst" u.a. mit der Formulierung „inhaltlich verstanden und bis auf leichte Rechenfehler richtig gelöst" überein.

[157] Die Zahlen in den Klammern geben die Korrelationen und das jeweilige Signifikanzniveau an. Eine Heraushebung bedeutet, dass die Korrelation signifikant ist.

15-2). Auf Grund der Konzeption von KLIP sollen darüber hinaus ebenfalls die Teilnahme am Unterrichtsversuch **u** (-0,035), das Geschlecht **g** (0,077) und die Zugehörigkeit zu einem Leistungskurs **k** (0,120) problematisiert werden. Aufgrund der Korrelationsanalyse in Tabelle 11-3 müssen entsprechend der dort angegebenen signifikanten Korrelationen mögliche Wechselwirkungen der Variablen berücksichtigt werden.

Erste Konstellation. Die Statistik für die erste Konstellation mit den Variablen **k, g, sf, nlh, i** und **u** ergibt:

Tabelle 11-5. Informationen zur Modellanpassung (n=119; A:)[158]

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	37,493	8	0,000
Mc Fadden	0,289		
Korrekte Klassifizierungen	81,5%		

Der LR-Test und Mc Faddens R^2 zeigen eine signifikante Modellanpassung und eine sehr gute Erklärung der Gruppentrennung in der Variable **vai**. Bei einem Trennwert von 0,5 werden 81,5% der Schülerinnen und Schüler richtig zugeordnet.[159]

Die Tabelle 11-6 enthält die geschätzten β-Werte (Sp. 2), den Standardfehler (Sp. 3), die Wald-Werte (Sp. 4) inklusive der Signifikanzen (Sp. 6) und die odd ratio (Sp. 7). In der ersten Spalte sind von den dichotomen Variablen immer die Ausprägungen aufgeführt, die durch die verwendete Effektkodierung mit 1 kodiert wurden. Die mehrkategorialen Variablen enthalten üblicherweise die rangniedrigsten Kategorien. Die jeweiligen Referenzkategorien sind nicht mitaufgeführt, der Regressionskoeffizient und die anderen Werte lassen sich entsprechend des in Abschnitt 11.2.1 beschriebenen Verfahrens bestimmen. So besagt die Tabelle beispielsweise, dass bei einem Wechsel von einem Grundkurs zu einem Leistungskurs und angenommener Konstanz in allen anderen Variablen der Logit um 0,901 anwächst, oder anders ausgedrückt, dass bei dem beschriebenen Wechsel das Wahrscheinlichkeitsverhältnis von $\pi_i/(1-\pi_i)$ um den Faktor 2,461 zunimmt.

Tabelle 11-6. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119; A:)

Ausprägung	Regressionskoeffizient (β)	Standardfehler	Wald	Freiheitsgrade	Sig.	e^{β}
LK (k)	0,901	0,629	2,049	1	0,152	2,461
Mädchen (g)	0,661	0,578	1,301	1	0,252	1,937
Gymn. (sf)	9,461	21,398	0,196	1	0,658	12854
Note			7,462	2	0,024	
schwach (nlh)	-0,352	1,264	0,078	1	0,780	0,703
durchschn. (nlh)	-1,531	0,567	7,284	1	0,007	0,216
Interesse			3,825	2	0,148	
ungern (i)	-0,900	0,738	1,487	1	0,223	0,407
teils teils (i)	-1,239	0,648	3,651	1	0,056	0,290
UV teilg. (u)	0,385	0,557	0,477	1	0,490	1,470
Konstante	-21,373	42,859	0,249	1	0,618	0,000

Verknüpfungsfunktion: Logit

Aus der Tabelle 11-6 wird deutlich, dass die Variable Schulform (**sf**), trotz geringem Signifikanzniveau, beim Wechsel von der Gesamtschule zum Gymnasium den Logit erheblich wachsen lässt. Dies hat sich in der signifikanten Korrelation (vgl. Tabelle 15-2) schon ange-

[158] In (n=119; A) gibt A die Fallnummern der Ausreißer an. In diesem Fallen liegen keine Ausreißer vor.
[159] Die Ausreißerstatistik zeigt vier Fälle: 6, 53, 74, 110. Nach Tilgung der Fälle treten keine nennenswerte Veränderungen ein.

deutet und zeigt sich ebenfalls deutlich in der Lösungsverteilung bei den einzelnen Schülerinnen und Schülern: Aus dem Kurs LKUO hat keine Schülerin die Aufgabe korrekt gelöst oder verstanden (vgl. Abbildung 11.6). Folglich liegt eine völlige Gruppentrennung vor. In einer solchen Situation ist jedoch keine ML-Schätzung möglich, so dass diese Variable trotz ihres Einflusses der Konstellation entnommen werden muss. Im Anschluss an die Analyse der ersten Konstellation wird folglich eine Untersuchung der zweiten Konstellation notwendig. Nach Ausschluss dieser Variable erhält man:

Tabelle 11-7. Informationen zur Modellanpassung (n=119; A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	19,923	7	0,001
Mc Fadden	0,187		
Korrekte Klassifizierungen	77,3%		

Tabelle 11-8. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119; A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	-0,013	0,576	0,001	1	0,982	0,987
Mädchen (g)	0,535	0,509	1,105	1	0,293	1,707
Note (nlh)			9,429	2	0,009	
schlecht	0,091	0,808	0,013	1	0,910	1,096
durchschn.	-,868	0,479	3,282	1	0,070	0,420
Interesse			2,152	2	0,341	
ungern (i)	-0,168	0,441	0,144	1	0,704	0,846
teils teils (i)	-0,343	0,372	0,854	1	0,355	0,709
UV teilg. (u)	-0,302	0,512	0,347	1	0,556	0,740
Konstante	-1,596	1,466	1,185	1	0,276	0,203

Verknüpfungsfunktion: Logit

Der Mc Fadden ist stark gesunken, was aufgrund der Gruppentrennung durch **sf** zu erwarten war.

Die Variable Note (**nlh**) besitzt als einzige einen signifikanten Einfluss auf das Lösungsverhalten bei Aufgabe 1. Hierbei ist die odd ratio und damit der Einfluss der Ausprägungen auf die erfolgreiche Bearbeitung der ersten Aufgabe wie folgt gestaffelt: durchschnittlich (0,420), schwach (1,096), gut (2,174 (0,114)[160]). Jedoch ist nur die zweite Ausprägung signifikant mit einem hohen Regressionskoeffizienten. Dies bedeutet, dass die durchschnittlichen Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe die schlechtesten Aussichten auf Erfolg besitzen. Der schlechte Wald-Wert bei den „schwachen" Schülerinnen und Schülern erklärt sich zum einen aus der problematischen Reduzierung auf drei Ausprägungen und zum anderen aus der sehr geringen Anzahl (5) von „schwachen" Schülerinnen und Schülern, von denen eine Schülerin die Aufgabe korrekt gelöst hat (vgl. Abbildung 11.8). Insgesamt haben lediglich 23,5% der Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe (vgl. Abbildung 11.2) inhaltlich korrekt gelöst. Berücksichtigt man folglich diese Ausprägung nicht, so steigt die Lösungsfähigkeit mit der zuvor eingestuften Leistung.

Die Variable Interesse (**i**) weist in keiner Ausprägung auf eine gute Trennfähigkeit der Variablen hin. Lediglich die dritte Ausprägung, „gern", hat bei einer Signifikanz von 0,172 eine odd ratio von 1,667. Damit haben Schüler und Schülerinnen mit Interesse an Mathe-

[160] Der Wert in der Klammer beschreibt den Signifikantwert.

matik Aussichten auf Erfolg bei dieser Aufgabe. Dies war auf Basis der Abbildung 11.9 schon zu erkennen.

Ein odd ratio Wert von 0,987 für die Variable Kursart (**k**) besagt, dass das Chancenverhältnis $\pi_i/(1-\pi_i)$ sich um eben diesen Faktor zu Gunsten des Leistungskurses verändert. Das bedeutet, dass die Kursart keinen Einfluss auf die Gruppentrennung nimmt. Das steht vermutlich mit der Lösungshäufigkeit von 0% im Leistungskurs der Gesamtschule im Zusammenhang.

In der Variable Geschlecht (**g**) beträgt die odd ratio 1,707 zu Gunsten der Mädchen bei einem Wald-Wert von 1,105 und einem Signifikanzniveau von 70,7%. Hier kann man nicht von einem signifikanten Beitrag zur Trennfähigkeit der Gruppen sprechen. Da diese Untersuchung explorativen Charakter besitzt und die Populationsgröße mit 119 Schülerinnen und Schülern vergleichsweise gering ist, sind die Ansprüche an die Signifikanzwerte nicht zu hoch anzusetzen, so dass man bei diesen Werten noch von einem geringen Einfluss auf die Gruppentrennung sprechen kann. Das zugehörige Konfidenzintervall für die odd ratio ist [0,630; 4,624], so dass auch hieran zu sehen ist, dass zwar kein signifikanter, aber dennoch ein leichter Einfluss zu sehen ist. Dieser Einfluss wird in der Tabelle 11.63 mit einem (+) festgehalten. Damit wird deutlich gemacht, dass die höher kodierte Ausprägung der Variable das Lösungsverhalten positiv beeinflusst.

Die Variable Zugehörigkeit zu KLIP (**u**) zeigt aufgrund des Wald-Wertes und der odd ratio keine Wirkung auf die Verstehenswahrscheinlichkeit.

Reduziert man das Modell abwechselnd um die Variablen **nlh, i, k, g** und **u**, so lässt sich bei der Variable **nlh** eine deutliche Abnahme und bei **i** eine leichte Abnahme des Gütekriteriums für die Trennfähigkeit beobachten. Bei den Variablen **k, g** und **u** ändert sich Mc Faddens R^2 nur in der zweiten Stelle hinter dem Komma. Darüber hinaus werden die Signifikanzwerte der ersten beiden Variablen besser, sobald eine von ihnen aus dem Modell entfernt wird. Dies macht auf Wechselwirkungen untereinander aufmerksam, was den in Abschnitt angesprochenen Zusammenhängen zwischen den Variablen **i** und **nlh** entspricht. Die Einbeziehung der Wechselwirkungen zwischen diesen Variablen verändert die Situation der Variable Interesse deutlich, nicht aber die der Variable Note.

Tabelle 11-9. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119; A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Interesse			6,041	2	0,049	
ungern (i)	-0,356	0,371	0,921	1	0,337	0,701
teils teils (i)	-0,374	0,352	1,128	1	0,288	0,688
gern (i)	0,730	0,298	6,003	1	0,014	2,074
Konstante	-1,330	0,242	30,344	1	0,000	0,264

Verknüpfungsfunktion: Logit

Die Tabelle 11.10 zeigt im Vergleich zu Tabelle 11.9 Veränderungen in der ersten und dritten Kategorie von **i**, was vermutlich mit dem ungleichen Gewicht zu tun hat, mit dem die Noten als Einflussgrößen eingehen, und der zum Interesse verschiedenen Rangfolge der Kategorien (vgl. Abbildung 11.8 & Abbildung 11.9). Damit lässt sich insgesamt der Note ein größerer Einfluss auf die Lösungshäufigkeit bei Aufgabe 1 zusprechen, der Einfluss des Interesses ist dennoch als wirksam anzusehen, wobei aber Abschwächungen bei gleichzeitiger Betrachtung von Note und Interesse zu beobachten sind.

Tabelle 11-10. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119; A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Note			10,414	2	0,005	
schwach (nlh)	0,108	0,784	0,019	1	0,890	1,11
durchschn. (nlh)	-0,896	0,472	3,597		0,058	0,408
gut (nlh)	0,787	0,470	2,808	1	0,094	2,197
Interesse			1,900	2	0,387	
ungern (i)	-0,070	0,400	0,030	1	0,862	0,933
teils teils (i)	-0,354	0,371	0,913	1	0,339	0,702
gern (i)	0,424	0,334	1,612	1	0,204	1,528
Konstante	-1,260	0,409	9,479	1	0,002	0,284

Verknüpfungsfunktion: Logit

Eine Reduktion des Modells in dieser Konstellation um die Ausreißer, deren standardisierten Residuen um hohe Pearson-r abweichen, führt zu einer leichten Verbesserung aller genannten Werte, offenbart jedoch kein wesentlich anderes Bild.

Interpretieren und **zusammenfassen** lässt sich das Ergebnis zur ersten Konstellation wie folgt: Die Wahrscheinlichkeit, die Aufgabe 1 zu verstehen, hängt in erster Linie von einer guten Note (**nlh**) ab. Die Variable Leistungskurs hat keinen relevanten Einfluss, was durch den wechselwirkenden Einfluss der Variable **sf**, die zur völligen Gruppentrennung beiträgt, zustande kommt. Als weiterer Faktor ist das Interesse (**i**) zu nennen, wobei die Schülerinnen und Schüler mit einem indifferenten Interesse (**i**) an der Mathematik eine geringere Chance besitzen, diese Aufgabe zu lösen, als die Schülerinnen und Schüler, die Mathematik nicht gern ausüben. Die Schüler und Schülerinnen, die sich gern mit Mathematik beschäftigen, haben die größten Lösungswahrscheinlichkeiten. Dies ist insgesamt nicht verwunderlich, da aus den oben dargelegten Gründen diese beiden Prädiktoren wichtige Faktoren für Leistungen im Unterricht sind. So zeigen sich hier deutlich die beiden Dimensionen, Kognition und Affekte, die sich mannigfaltig beeinflussen. Weiter lässt sich sagen, dass tendenziell die Mädchen die Aufgabe etwas besser als die Jungen lösen. Dieser Variablen kann aber kein signifikanter Einfluss auf die Gruppentrennung zugesprochen werden. Der Zugehörigkeit zum Unterrichtsversuch (**u**) kommt keine Bedeutung zu. Es ist eine leichte Schiefe zu Gunsten der Schülerinnen und Schüler, die nicht am Unterrichtsversuch beteiligt waren, festzustellen. Angesichts der zu Beginn dieses Abschnitts formulierten Annahme mag dies überraschen, da es zu erwarten war, dass die Vergleichskurse die Aufgabe besser bearbeiten. In dieser Konstellation hat sich damit die Konzeption von KLIP nicht negativ auf die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler ausgewirkt. Obwohl das schematische Lösen solcher Kalkülaufgaben nicht geübt wurde, zeigen die Schülerinnen und Schüler aus KLIP nahezu gleiche Leistungen wie die Schülerinnen und Schüler aus den Vergleichskursen. Ferner ist damit auch das durch diese Aufgabe abgefragte Verständnis des Flächeninhaltsaspektes bei den leistungsstärkeren und interessierten Schülerinnen und Schülern wesentlich besser verankert, als bei den anderen Schülerinnen und Schülern. Eine mögliche Zurückdrängung dieses Aspektes auf Seiten der Schülerinnen und Schüler in KLIP kann ebenfalls nicht beobachtet werden. Inwieweit sich dies auch in der zweiten Konstellation bestätigt, also bei einem direkten Vergleich der beiden Kurse LKUC und GKUC1 mit ihren Kontrollkursen, wird im Anschluss zu untersuchen sein. Betrachtet man die vorausgesagte Klassifizierung, so fällt auf, dass bei gut 83% korrekter Zuordnung fast alle Schülerinnen und Schüler, die mit „richtig verstanden" zugeordnet wurden, den beiden gymnasialen Leistungskursen angehören. Dies deutet auf die schon erwähnte Verzerrung des Ergebnisses durch den Gesamtschul-Leistungskurs hin, dessen Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe kein korrektes Ergebnis erzielten. Diese Frage muss in der zweiten Konstellation untersucht werden.

Computereinsatz und Unterrichtsversuch. Doch bevor die zweite Konstellation analysiert wird, wird die Variable **u** gegen die Variable **r** ausgetauscht. In der zweiten Konstellation sind sie identisch, so dass es nur Sinn macht, die erste Konstellation unter Einbeziehung dieser Variablen zu studieren. Wenn keine Wechselwirkungen zwischen der neuen Variablen und den Variablen des gerade entwickelten Modells in der ersten Konstellation bestehen, können die Variablen direkt ausgetauscht werden. Liegen jedoch Wechselwirkungen vor, so können die beiden Modelle mit jeweils nur einem Regressor, sogenannte *Einzelanalysen*, verglichen werden. In diesem Fall ist ein Austausch ohne ein Auftreten von Wechselwirkungen möglich. Die Austausch der Variablen **u** und **r** und Beibehaltung aller anderen Variablen zeigt deutliche Veränderungen.[161]

Tabelle 11-11. Informationen zur Modellanpassung mit **i** und **nlh** (n=119; A:)

	u	r	Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	18,1	22,2	5	0,000
Mc Fadden	0,171	0,201		
Korrekte Klassifizierungen	77,3%	80,7%		

Tabelle 11-12. Vergleich der Schätzer der Gleichungsvariablen mit **i** und **nlh** (n=119; A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Teiln. UV (u)	-0,268	0,508	0,279	1	0,597	0,765
Computereinsatz (r)	1,040	0,512	4,122	1	0,042	2,83

Verknüpfungsfunktion: Logit

Während die Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) keine bedeutsamen Einwirkungen auf die Gruppentrennung zeigt, ist bei der Variable **r** mit einem Regressionskoeffizient von 1,04 mit einem signifikanten Wald-Wert von 4,122 starker Einfluss zu beobachten. Folglich lässt sich an dieser Aufgabe eine interpretatorische Trennung der Variablen **u** und **r** deutlich nachweisen, worauf auch schon der Vergleich der relativen Häufigkeiten in den Abbildungen 11.4 und 11.5 hinwies. Die Beurteilung der Lösungen zu dieser Aufgabe zeigte bei den falschen Lösungen, dass diese in erster Linie durch die Vernachlässigung der Nullstellen zustande kamen. Hinsichtlich der Anwendung von Integrationsregeln waren weniger Schwierigkeiten zu beobachten. Ein Fehler, der häufiger zu beobachten war, war die Integration des Produkts, als ob es sich um eine Summe handeln würde. Beide Fehler tauchten überwiegend in Kursen auf, die keinen Computer zur Verfügung hatten, ausgenommen des Vergleichskurses im Leistungskursbereich. Damit wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler, die mit Hilfe des Computers gearbeitet haben, keine Kalkülfähigkeiten eingebüßt haben. Vielmehr machten sie ein größeres Verständnis des F-Aspektes deutlich als die Schülerinnen und Schüler der anderen Kurse. Dies lässt sich z.B. dahingehend interpretieren, dass der Computer die Möglichkeit schafft, die Konzentration auf das Wesentliche zu fokussieren.

Zweite Konstellation. Die Analyse in der zweiten Konstellation liefert das nachfolgende Ergebnis:

[161] Es werden nur die Werte von **u** und **r** aufgeführt.

Tabelle 11-13. Informationen zur Modellanpassung (n=80; A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	64,914	7	0,000
Mc Fadden	0,222		
Korrekte Klassifizierungen	83,8%		

Tabelle 11-14. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=80; A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,628	0,757	4,623	1	0,032	5,093
Mädchen (g)	0,644	0,692	0,867	1	0,352	1,904
Note			2,641	2	0,267	
schwach (nlh)	-4,224	19,538	0,047	1	0,829	0,015
durchschn. (nlh)	1,551	9,774	0,025	1	0,874	4,718
Interesse			2,823	2	0,244	
ungern (i)	-0,299	0,629	0,226	1	0,634	0,741
teils teils (i)	-0,433	0,496	0,763	1	0,382	0,649
UV teilg. (u)	-0,386	0,643	0,360	1	0,548	0,680
Konstante	-6,225	9,944	0,392	1	0,531	0,002

Verknüpfungsfunktion: Logit

Die Modellanpassung und Mc Faddens R^2 sind gut. Entsprechend der Korrelationen (vgl. Tabelle 15-2) zeigen sich in den Variablen Kursart (**k**), Note (**nlh**) und Interesse (**i**) Prädiktoren für das Lösungsverhalten bei der ersten Aufgabe. Signifikant ist nur die Kursart (**k**), jedoch deuten die odd ratios und gleichzeitigen niedrigen Übertretungswahrscheinlichkeiten bei den anderen beiden Variablen (z.B. 0,244 bei Interesse) auf einen zu berücksichtigen Einfluss hin. Die schlechten Wald-Werte in der ersten Ausprägung der Variable **nlh** rühren von der geringen Zahl „schwacher" Schülerinnen und Schüler, von denen 25% die Aufgabe inhaltlich verstanden haben. Eine Interpretation ist daher an dieser Stelle nicht möglich. Der Einfluss der Variable ist in erster Linie durch die interessierten Schülerinnen und Schüler bedingt ($\beta = 0,732$).

Ähnlich wie in der ersten Konstellation zeigen die Variablen **nlh** und **i** und **k** und **i** Wechselwirkungen, deren Hinzuziehung jedoch keine wesentlichen Verbesserungen des Modells bewirkt. Wichtig ist jedoch, dass der Vorteil auf Seiten des Leistungskurses LKUC damit nicht auf die Note zurückzuführen ist. Zudem werden Ausreißer angezeigt. Eine Modifizierung des Modells ohne Ausreißer wird weiter unten durchgeführt.

Die Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) hat eher geringen Einfluss auf die Trennung der Gruppen. Das ist erstaunlich, da der Leistungskurs ohne Computereinsatz (LKUO) nicht Teil dieser Konstellation ist und somit eine Steigerung dieser Variable zu erwarten gewesen wäre. Die Situation erklärt sich mit Blick auf die Abbildung 11.9. Dort kann man erkennen, dass sowohl der Leistungskurs LKOO als auch der Grundkurs GKUC2 vergleichsweise gut abgeschnitten haben. Sowohl die Berücksichtigung des LKOO als auch die Vernachlässigung des GKUC2 verbessert die Situation zu Gunsten der Schülerinnen und Schüler, die nicht am Unterrichtsversuch teilgenommen haben.

Die Zugehörigkeit zum weiblichen Geschlecht scheint einen geringen Einfluss auf die Gruppentrennung zu besitzen.

Die Ausreißerstatistik filtert vier Fälle mit hohem Pearson-r heraus. Deswegen bedarf es einer Untersuchung unter Ausschluss dieser Ausreißer. Die Ausreißer werden nach Darstellung der zugehörigen Statistik näher diskutiert. Nach Entfernen der Fälle 34, 35, 55 und 80, den Fällen mit hohem Pearson-r ergibt sich das folgende Bild:

Tabelle 11-15. Informationen zur Modellanpassung (n=76; A: 34, 35, 55, 80)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	39,828	7	0,000
Mc Fadden	0,509		
Korrekte Klassifizierungen	88,2%		

Tabelle 11-16. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=76; A: 34, 35, 55, 80)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	3,736	1,334	7,847	1	0,005	41,927
Mädchen (g)	-0,080	3,736	0,007	1	0,931	0,923
Note			5,004	2	0,082	
schwach (nlh)	-4,290	31,081	0,019	1	0,890	0,014
durchschn. (nlh)	0,816	15,554	0,003	1	0,958	2,262
Interesse			3,837	2	0,147	
ungern (i)	0,698	0,992	0,494	1	0,482	2,009
teils teils (i)	-1,394	0,824	2,863	1	0,091	0,248
UV teilg. (u)	-0,914	0,953	0,921	1	0,337	0,401
Konstante	-8,810	15,778	0,312	1	0,577	0,000

Verknüpfungsfunktion: Logit

Gruppentrennung und Modellanpassung sind sehr gut. Dabei besitzen die Variablen Kursart (**k**) und Note (**nlh**) einen signifikanten Einfluss auf die Gruppentrennung. Bei der Variablen Note besteht weiterhin das oben beschriebene Problem. Die Variable Interesse (**i**) ist zwar insgesamt nicht signifikant, sie weist aber in der zweiten und dritten Ausprägung auf einen signifikanten Einfluss hin.

Der Einfluss des Geschlechts (**g**) ist nicht vorhanden, was aus Tabelle 11-17 abzulesen ist. So hat ein Junge aus einem Leistungskurs, der an dem Unterrichtsversuch nicht teilgenommen hat und sowohl eine gute Note als auch gern Mathematik macht, eine 86% Verstehenswahrscheinlichkeit für die Aufgabe 1. Ein Mädchen aus demselben Kurs hat eine 85% Chance.

Tabelle 11-17. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten für Aufgabe 1 (n=76; A.)

Interesse (k)	Geschlecht (g)	Kursart (k)	Note (nlh)	Teiln. am UV (u)	Vorhergesagte Lösungs-wahrscheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
gern	J	LK	gut	Ja	72	Ja
gern	J	LK	gut	Nein	86	Ja
gern	M	LK	gut	Nein	85	Ja

Der Vergleich von zwei Schülern, die gern Mathematik machen und eine gute Note auf dem letzten Zeugnis hatten, zeigt, dass der am Unterrichtsversuch nicht beteiligte Schüler eine 86% Verstehenswahrscheinlichkeit besitzt. Der Schüler, der teilgenommen hat, hat nur eine 72% Chance. Dies weist auf eine tendenziell bessere Verstehenswahrscheinlichkeit auf Seiten der Schülerinnen und Schüler hin, die nicht am Unterrichtsversuch teilgenommen haben. Diese vorhergesagte Wahrscheinlichkeit ist zwar nicht signifikant, aber die Überschreitungswahrscheinlichkeit beträgt nur 40%. Dies ist zwar immer noch ein nur sehr geringer Einfluss dieser Variable, aber es ist erstaunlich, wenn man den Computereinfluss in der Gesamtpopulation betrachtet.

Vergleichen wir in der zweiten Konstellation die erste Statistik (Tabelle 11-14) und die reduzierte Statistik (Tabelle 11-16), so ist zu bemerken, dass es sich bei den Ausreißern um Mädchen handelt, die sich alle im Grundkurs befinden und die Aufgabe 1 verstanden haben. Sie teilen sich gleich auf die beiden Grundkurse auf. Ihren Status als Ausreißer rechtfertigt sich im Wesentlichen durch vermindertes Interesse und schwacher Note. Dadurch werden die Variablen Note und Interesse gewichtiger. Aufgrund der heterogenen Zugehörigkeit zu den einzelnen Ausprägungen in diesen beiden Variablen ist die Verbesserung zu berücksichtigen. Dagegen sollte man die Verbesserungen zu Gunsten der Jungen und des Leistungskurses kritisch betrachten. Im ersten Fall ist die odd ratio knapp 2, was bedeutet, dass bei Erhöhung um eine Einheit in der Variablen Geschlecht das Wahrscheinlichkeitsverhältnis der Aufgabe sich zu Gunsten der Mädchen verdoppelt. In der reduzierten Statistik wird ein geringer Vorteil für die Jungen beschrieben, so dass ich respektive des Ausreißerstatus der Variable **g** keinen nennenswerten Einfluss zugestehen würde. Die odd ratio für die Kursart steigt von 5 auf 42. Das liegt daran, dass von den fünf richtigen Lösungen im Grundkursbereich vier richtige Lösungen gestrichen werden. Folglich kann man von einem gewichtigen Einfluss der Variable auf Seiten der Ausprägung Leistungskurs sprechen, jedoch würde ich dem Einfluss keinen Faktor von 40 zuweisen.

Die Abbildungen 11.5-11.7 deuten auf Interaktionseffekte zwischen den Variablen **k** und **u** hin. Zeigt sich bei den Leistungskursen eine Dominanz des KLIP-Kurses, so ist dies bei den Grundkursen genau umgekehrt. Eine logistische Regression mit Wechselwirkung zwischen diesen beiden Variablen zeigt jedoch eine odd ratio von 1 bei einem Signifikanzwert von 0,995, was der Wechselwirkungsvermutung widerspricht.

Für die zweite Konstellation lässt sich zusammenfassend bemerken, dass dem Leistungskurs ein starkes Gewicht zukommt, wohingegen der Einfluss des Geschlechts unverändert nicht vorhanden ist. Die Variablen Note und Interesse deuten auf einen Einfluss, der jedoch durch die ungleiche Verteilung der Schüler und Schülerinnen auf die Variablenkategorien nur schwer zu interpretieren ist. Da die Frage nach der Abhängigkeit der Lösungshäufigkeiten von diesen Variablen in der vorliegenden Arbeit keine zentrale Rolle spielt, wird hierauf nicht weiter eingegangen. Die Schülerinnen und Schüler, die sich innerhalb von KLIP die Integralrechnung selbsttätig erarbeitet haben, zeigen gegenüber den Kontrollkursen leichte Schwächen bei dieser Aufgabe. Dieser Unterschied ist aber nur sehr gering.

Zusammenfassung. Die Lösungswahrscheinlichkeiten bei Aufgabe 1 sind angesichts des niedrigen Anforderungsniveaus insgesamt sehr gering. Sie liegen bei den beiden gymnasialen Leistungskursen zwar erheblich höher, sie sind jedoch für die Gesamtpopulation nicht zufriedenstellend. Lobend hervorzuheben sind die Lösungswahrscheinlichkeiten in den Kursen LKUC und GKUC2, die mit 53% und 40% gute Werte erzielen, wenn man bedenkt, dass diese Art von Rechnungen nicht explizit geübt wurde. Das ist jedoch, wie diese Untersuchung ebenfalls zeigt, nicht auf alle KLIP-Kurse übertragbar, da der Gesamtschul-Leistungskurs und der Grundkurs GKUC1 bei dieser Aufgabe schwach abgeschnitten haben. Dies kann damit zusammenhängen, dass während der KLIP-Phase in dem Grundkurs keine Begriffsbildung stattgefunden hat und in dem Leistungskurs LKUO die Intentionalen Probleme nicht gelöst werden konnten. Es kann aber auch sein, dass der Einsatz des Computers einen wichtigen Einfluss besitzt, wie die Untersuchung der ersten Konstellation zeigte. Damit lässt sich die Hypothese unterstützen, dass der Flächeninhaltsaspekt, obwohl dieser bei den Vergleichskursen als der dominierende Integralaspekt beschrieben wurde, von den Schülerinnen und Schülern, die die Integralrechnung selbsttätig und mit Unterstützung des Computers entwickelt haben, durch diese Art der Aufgabe besser abrufbar ist. Da es sich bei dieser Aufgabe um eine Kalkülaufgabe handelt, bleibt die Frage offen, inwieweit die KLIP-Schülerinnen und Schüler diesen Integralsaspekt auch bei Problemlöse- oder Verständnisaufgaben besser aktivieren können.

Die Variable Kursart zeigt sich bei den Vergleichskursen dominant hinsichtlich der Gruppentrennung. Die mit ihr korrelierten Variablen Note und Interesse haben ebenfalls gewichtigen Einfluss, wobei die Kursart jedoch keine Wechselwirkungen mit der Note zeigt. Das bedeutet, dass der F-Aspekt und Kalkülfähigkeiten in den Leistungskursen in einem höheren Maße als in den Grundkursen vorhanden sind. Es wird sich zeigen, ob die kalkülfreie Aufgabe 4b den Schülerinnen und Schülern aus den Grundkursen bessere Ergebnisse als bei dieser Aufgabe ermöglicht.

In beiden Konstellationen ist eine leichte Differenz im Lösungsverhalten der Geschlechterausprägungen zu Gunsten der Mädchen zu beobachten.

Von einem Einfluss der KLIP-Zugehörigkeit lässt sich nur sehr bedingt sprechen. Im direkten Vergleich der Kurse weisen die Kontrollkurse tendenziell etwas bessere Ergebnisse auf, in der Gesamtpopulation ist ein derartiges Ungleichgewicht jedoch nicht zu beobachten. Für diesen Aufgabentyp bedeutet das, dass die Schülerinnen und Schülern des Unterrichtsversuchs den zuvor angenommenen Verlust an Kalkülfähigkeiten nicht zeigen.

11.3.3.2 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 2a

Zur Lösung der Aufgabe 2a war die Kenntnis der Mittelwertbildung bei diskreten Werten notwendig. Damit gehört das Anforderungsniveau der Aufgabe in die Sekundarstufe I und selbst dort ist sie allein mit heuristischen Strategien lösbar. So mag es nicht verwundern, dass die Lösungshäufigkeit bei 77,3% liegt. Problemlösefähigkeiten verlangt diese Aufgabe nicht, sondern die Schülerinnen und Schüler müssen in erster Linie in der Lage sein zu addieren und zu dividieren. Die Aufgabe gilt als richtig verstanden, wenn die sieben Werte aufaddiert und das Ergebnis durch die Anzahl der Werte dividiert wurde. Rechenfehler fallen nicht ins Gewicht.

Forschungsfragen und Hypothesen. Für den Vergleich zwischen den KLIP-Kursen hat die Aufgabe nachrangige Bedeutung. Es ist sogar zu vermuten, dass sie in keiner der Gruppen eine signifikante Trennung erzeugt. Sie wird dennoch diskutiert, um hinsichtlich der Analyse der zur Lösung der Aufgabe 1 notwendigen Kalkülfähigkeiten eine weitere Orientierung zu bekommen.

Korrelationen. Kursart **k** (**0,226 (0,05)**), Geschlecht **g** (**0,180 (0,05)**), Interesse **i** (**0,207 (0,05)**) und Teilnahme am Unterrichtsversuch **u** (-**0,210 (0,05)**) sollten auf Grund ihrer signifikanten Korrelationen mit dem Lösungsverhalten bei Aufgabe 2a (vgl. Tabelle 15-3) näher untersucht werden. Die Schulform ist in diesem Fall nicht hochkorreliert, die Korrelationen in der zweiten Konstellation sind dennoch deutlich stärker.

Erste Konstellation. Eine logistische Regression mit allen Variablen zeigt, dass die anderen Variablen tatsächlich nicht relevant sind. Aber auch die Variable **i** nimmt keinen signifikanten Einfluss auf die Gruppentrennung bei Aufgabe 2a. Unter Einbeziehung der Variablen **k, g** und **u** zeigen sich die drei Fälle 8, 16 und 28 als Ausreißer. Fall 8 hat das korrekte Ergebnis an den Rand geschrieben und es wäre möglich, dass die Zeit für eine vollständige Lösung nicht ausreichte. Aus diesem Grund wird dieser Schüler als Ausreißer mit einem hohen Pearson-r ausgeschlossen. Der Schüler (Fall 26) hat das Stundenmittel korrekt bestimmt, diesen Wert jedoch noch mit dem Faktor 60 multipliziert um das Stundenmittel zu erhalten. Da dieser Schüler erst Teil b berechnete und dort nicht durch die Intervalllänge geteilt hat, liegt die Vermutung nahe, dass der Schüler hinsichtlich eines Vergleiches dieser beider Aufgabenteile den Wert 179 mit 60 multipliziert hat. Auch hier ist ein Ausreißerstatus zu rechtfertigen. Der letzte Ausreißer hat den Test insgesamt ausführlich gelöst, scheint jedoch zur Lösung dieser Aufgabe keine Zeit mehr gehabt zu haben. Er verweist auf die Bearbeitung der Aufgabe zum Wasserverbrauch, bei der man ebenfalls aus diskreten Werten einen Mittelwert bestimmen konnte. Daraus lässt sich schließen, dass ein Verständnis bei hinreichend viel Zeit gezeigt werden könnte.

Tabelle 11-18. Informationen zur Modellanpassung (n=116, AR=8, 16, 26)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	26,483	3	0,000
Mc Fadden	0,224		
Korrekte Klassifizierungen	77,6%		

Tabelle 11-19. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=116, AR=8, 16, 26)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,886	0,679	7,716	1	0,005	6,594
Mädchen (g)	-1,182	0,587	4,053	1	0,044	0,307
UV teilg. (u)	-2,150	0,800	7,228	1	0,007	0,116
Konstante	4,742	2,017	5,526	1	0,019	114,638

Verknüpfungsfunktion: Logit

Modellanpassung und Mc Fadden sind gut. Alle drei Variablen sind nach Entfernen der Ausreißer signifikant. **u** und **k** waren schon für alle 119 Schülerinnen und Schüler signifikant. Das Entfernen von 3 Jungen mit Ausprägung 1 in **va2** hat den Einfluss der Jungen auf die Gruppentrennung bei der abhängigen Variable natürlich gestärkt. Den stärksten Einfluss haben die Variablen **k** und **u**. Wechselwirkungsmodelle tragen zu keiner Verbesserung des Modells bei.

Bei einem Trennwert von 0,6 werden nur die Schülerinnen aus einem KLIP-Grundkurs der ersten Ausprägung von **va2** zugeordnet. Ansonsten bewegen sich die vorhergesagten Lösungswahrscheinlichkeiten in einem Bereich nahe 1. Ein Junge aus dem Kontroll-Leistungskurs hat dabei die beste Chance die Aufgabe inhaltlich richtig zu lösen. Die Differenz zwischen Mädchen und Jungen fällt in Grundkursen stärker aus als in den Leistungskursen.

Tabelle 11-20. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten für Aufgabe 2a (n=116, AR: 8, 16, 26)

Kursart (k)	Teiln. am UV (u)	Geschlecht (g)	Vorhergesagte Lösungs-wahrscheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
GK	Ja	M	51	Nein
LK	Ja	M	86	Ja
GK	Nein	M	89	Ja
LK	Nein	M	98	Ja
GK	Ja	J	76	Ja
LK	Ja	J	95	Ja
GK	Nein	J	96	Ja
LK	Nein	J	99	Ja

Computereinsatz und Unterrichtsversuch. Der Austausch der Variable **u** durch **r** führt zu einem vergleichbaren Ergebnis (vgl. Tabelle 15-5). Es zeigen sich wiederum die drei Fälle als Ausreißer. Mc Faddens R^2, das die Güte des Modells zur Gruppentrennung beschreibt, ist etwas schlechter geworden. Ebenso ist der Einfluss des Computereinsatzes auf die Gruppentrennung nicht so stark wie der der Variablen **u**. Der Wald-Wert sinkt von 7,2 auf 5,2 und die odd ratio fällt um den Faktor ½ . Zudem scheint **r** mit **k** in Wechselwirkung zu stehen, worauf die gesunkenen Einflusswerte bei **k** hindeuten. Und tatsächlich zeigt sich, dass das Produkt der ersten Ausprägungen beider Variablen eine odd ratio von 0,122 bei einer Übertretungswahrscheinlichkeit von 82,9% besitzt. Das ist nicht signifikant, zeigt aber, dass der Vergleichsgrundkurs hinsichtlich des Computereinsatzes weniger Einfluss auf die Gruppentrennung besitzt als hinsichtlich der KLIP-Teilnahme (vgl. Abbildung 11.6). Damit sinkt der Einfluss der Kategorie „nicht am Unterrichtversuch teilgenommen" geringfügig. Das Wechselwirkungsmodell besitzt zudem einen Mc Fadden-Wert von 0,228, was wiederum für eine gute Erklärung der Gruppentrennung spricht. Das Ergebnis muss jedoch kritisch gesehen werden, da ein Viertel der Schülerinnen und Schüler aus diesem Kurs die Aussage der Lehrerin bestätigte, dass ab und an der Computer im Unterricht eingesetzt wird. Insofern relativiert sich die besondere Rolle dieser Variable ein wenig gegenüber der KLIP-Teilnahme.

Zweite Konstellation. Eine logistische Regression für die Variabeln **k, g** und **u** in der zweiten Konstellation (vgl. Tabellen 15-6 & 15-7) offenbart eine ähnliche Situation wie schon in der ersten Konstellation. Zwar ist der Signifikanzwert des Geschlechts nicht mehr so hoch, jedoch hat sich der Einfluss aller Variablen verstärkt. Lediglich der Wald-Wert des Leistungskurses ist etwas gesunken.

Zusammenfassung. Bei Aufgabe 2a haben die Schüler, die nicht am Unterrichtsversuch beteiligt sind und einen Leistungskurs besuchen, die größten Chancen, die Aufgabe korrekt zu lösen. Daraus lässt sich jedoch nicht schließen, dass die anderen Schülerinnen und Schüler keine Aussicht auf Erfolg besäßen. Im Gegenteil, nur die Mädchen aus den KLIP-Grundkursen haben Misserfolgsaussichten. Insofern muss man deutliche Vorteile auf Seite der Kontrollkurse sehen, ohne damit ein Scheitern der anderen Kurse zu konstatieren. In allen Kursen zeigen die Jungen die besseren Ergebnisse, ihr Einfluss ist jedoch nicht so groß wie die der Ausprägungen der Variablen **k** und **u**.

Die Variable **r** wirkt in dieselbe Richtung wie **u.** Diese Einwirkung fällt ein wenig geringer aus. Eine spezifizierte Einflusszuweisung auf eine der Variablen ist dennoch nicht möglich.

Der Aufgabentyp ist den kalkülorientierten Aufgaben zuzurechnen, jedoch nicht bereichsspezifisch für die Integralrechnung. Fast alle Schülerinnen und Schüler weisen Kalkülfähigkeiten nach, es ist jedoch zu erkennen, dass Schülerinnen und Schüler aus den Vergleichskursen und aus der Gesamtschule hierbei die besten Ergebnisse erzielen. Somit ist der in TIMSS bereits untersuchte Zusammenhang, dass Schülerinnen und Schüler, die Probleme bei schwierigen Aufgaben besitzen, in den Aufgaben mit niedrigem Anforderungsniveau besser sind als die guten Schüler und Schülerinnen, auch hier erkennbar (vgl. z.B. BAUMERT & LEHMANN, 1997, S.133).

11.3.3.3 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 2b

Zur Lösung der zweiten Aufgabe muss der Schülerin bzw. dem Schüler klar sein, dass man mit Hilfe der Integralrechnung Mittelwerte von kontinuierlichen Prozessen bestimmen kann. Der gegebene Funktionsterm muss in den Grenzen 0 und 180 integriert und durch die Länge des Intervalls dividiert werden. Dabei ist die Bestimmung von möglichen Nullstellen nicht notwendig. Der so bestimmte Wert beträgt genau $180\,\mu g/m^3$ und liegt damit um $1\,\mu g/m^3$ höher als der im ersten Teil berechnete Wert. Die Aufgabe gilt als inhaltlich verstanden, wenn das Integral und daraus der Mittelwert bestimmt wurden. Existieren weder bei der Integration noch beim Berechnen des Wertes bedeutende Fehler, wird die Lösung als vollständig korrekt bezeichnet. Eine Lösung, die lediglich die Berechnung des Integrals, aber nicht die Bestimmung des Mittelwerts beinhaltet, gilt als nicht verstanden.

Anders als in Aufgabe 1, in der lediglich Kalkülfähigkeiten verlangt wurden, die gegebenenfalls auch ohne tieferes Verständnis der Anwendungen der Integralrechnung angewendet werden konnten, verlangte die Lösung dieser Aufgabe Verständnis des Mittelwertaspektes und Problemlösefähigkeiten. Problemlösefähigkeiten wurden insofern verlangt, als dass die Schülerin bzw. der Schüler den realistischen Kontext mit der mitgelieferten Mathematik (dem Funktionsterm) in Verbindung setzen musste. Das Problem, die Lösungsgedanken und die Lösung mussten verbalisiert werden. Im Problemlöseprozess musste ein geeigneter Ansatz gefunden und das Problem in Teilschritte zerlegt werden. Im Unterschied zu Kalkülaufgaben, war der Lösungsweg bei dieser Aufgabe nicht vorgegeben. Der erste Aufgabenteil suggerierte, dass man nur ein paar Werte benötigt, um den Mittelwert zu berechnen. So konnte es passieren, dass Schülerinnen und Schüler lediglich zwei oder mehr Werte in den Funktionsterm einsetzten und daraus den Mittelwert bestimmten. Ebenso war es denkbar, dass einige Schülerinnen und Schüler so vorgingen, dass sie angesichts des Kontextes der Integralrechnung nur den Funktionsterm integrierten. Dann wäre jedoch ein entscheidender Problemlöseschritt noch nicht bewältigt: die Berechnung des Durchschnittswerts.

Forschungsfragen und Hypothesen. Die an KLIP beteiligten Kurse sind stärker als die Kontrollkurse mit Anwendungen der Integralrechung konfrontiert worden. Darüber hinaus lenkten die Probleme des Fahrtenschreibers und des Wasserbrauchs die Aufmerksamkeit auf den Mittelwertaspekt der Integralrechnung. Dieser Aspekt musste jedoch explizit rechnerisch nicht angewendet werden. So stellt sich die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler in KLIP, die in die Intentionalen Probleme gelegten Intentionen des Mittelwertaspektes erkannt haben und anwenden konnten bzw. waren die Schülerinnen und Schüler aus den Kontrollkursen in der Lage mit ihrem Wissen über Integrale den Bezug zu diesem Anwendungsgebiet herzustellen. Diese Frage wird in Aufgabe 4 a noch einmal aufgegriffen und es bietet sich ein Vergleich des Lösungsverhaltens bei beiden Aufgaben an.

Als Teil der Problemlösefähigkeiten verlangt die Lösung der Aufgabe 2b die Fähigkeit, die Lösung angemessen sprachlich darzustellen. Aufgrund der Forschungshefte sind jedoch auch hier bei den KLIP-Kursen ausgeprägtere Fähigkeiten zu vermuten.

Zusammenfassend lässt sich die Hypothese formulieren, dass die Schülerinnen und Schüler, die am Unterrichtsversuch teilgenommen haben, größere Aussichten auf Erfolg bei dieser Aufgabe besitzen.

Korrelationen. Diese These wird durch die signifikanten Korrelationen der einzelnen Variablen mit dem Lösungsverhalten zu Aufgabe 2b gestützt (vgl. Tabelle 15.8): **u** (**0,215**) auf einem 95%-Signifinkanzniveau bei der Gesamtpopulation und (**0,311**) auf einem 99%-Signifikanzniveau in der zweiten Konstellation. In der zweiten Konstellation zeigen sich zudem signifikante Korrelationen des Lösungsverhalten mit den Variablen **k, i** und **nlh**. Von diesen Variablen lässt sich ein Einfluss auf die Lösungswahrscheinlichkeit der Aufgabe annehmen, dieser würde aber nicht überraschen. Lediglich die Berücksichtigung der Variable Kursart könnte sich als interessant erweisen, da so die Frage zu beantworten wäre, ob die Teilnahme am Unterrichtsversuch größere Auswirkungen zeigt als die Zugehörigkeit zu einem Leistungskurs. Zudem wird der Einfluss des Geschlechts hinsichtlich des übergeordneten Forschungsinteresses und wegen des auffälligen Anstiegs der Korrelationen in der zweiten Konstellation auch die Variable **sf** in das Modell einbezogen.

Erste Konstellation. Die logistische Regression in der ersten Konstellation liefert ein Modell mit den Variablen **k**, **u, g** und **sf** das nachfolgende Ergebnis:

Tabelle 11-21. Informationen zur Modellanpassung (n=119; A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	19,121	4	0,001
Mc Fadden	0,133		
Korrekte Klassifizierungen	71,4%		

Tabelle 11-22. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119; A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,147	0,533	4,631	1	0,031	3,149
Mädchen (g)	-0,654	0,463	2,000	1	0,157	0,520
Gymn. (sf)	2,429	0,803	9,144	1	0,002	11,350
UV teilg. (u)	1,905	0,592	10,366	1	0,001	6,717
Konstante	-9,345	2,627	12,657	1	0,000	0,000

Verknüpfungsfunktion: Logit

Die Modellanpassung, der Gesamtbeitrag aller Variablen, ist nur 0,133. Jedoch lassen sich nur Variablen hinzufügen, die den Beitrag um einen minimalen Betrag ergänzen. Wie erwartet besitzt die Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) einen großen Einfluss auf die Gruppentrennung der Lösungskategorien bei dieser Aufgabe. Die Schulform besitzt zwar keine relevante Korrelation, trägt aber ebenfalls stark zur Gruppentrennung bei. Eine Untersuchung in der zweiten Konstellation ist damit dringend angeraten. Der Einfluss des Geschlechts ist nicht signifikant, zeigt aber geringen Einfluss.

Computereinsatz und Unterrichtsversuch. Der Austausch der Variablen **u** und **r** führt zu Wechselwirkungen mit **sf**, so dass hinsichtlich eines Vergleiches der beiden Modelle lediglich der Einfluss der Variabelngruppen **k, g** und **u** und **k, g** und **r** untersucht werden. Dabei erhalten wir die folgenden Werte für **u** und **r**:

Tabelle 11-23. Vergleich der Gleichungsvariablen von **r** und **u** in zwei Modellen (**k, g**) (n=119)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
UV teilg. (u)	1,203	0,508	5,602	1	0,018	3,330
Computereinsatz (r)	2,062	0,557	13,701	1	0,000	7,86

Verknüpfungsfunktion: Logit

Der Einfluss des Computereinsatzes (**r**) unterscheidet sich wesentlich von dem der Teilnahme an Unterrichtsversuch (**u**). Der Faktor für die Veränderung des Wahrscheinlichkeitsverhältnisses $\pi_i/(1-\pi_i)$ ist mehr als doppelt so groß für den Computereinsatz. Folglich lässt sich sagen, dass der Einsatz des Computers in KLIP wesentlich zum Erfolg bei dieser Aufgabe beigetragen hat. So ließe sich auch die Vermutung bestätigen, dass der KLIP-Kurs ohne Computer nicht zur Aufgabenlösung gelangt ist, da ihm der Computer vorenthalten wurde. Und zwar mit den in Kapitel 4 dargestellten Funktionen des Computereinsatzes: zur Unterstützung der Kognition: zum experimentellem Arbeiten, zur schnellen Lösung von Rechen- und Routineaufgaben und zur Veranschaulichung.

Für die beiden Modelle mit den Variablen **k, g** und **r** und **k, g** und **u** erhalten wir die vorgesagten Lösungswahrscheinlichkeiten:

Tabelle 11-24. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten für Aufgabe 2b (n=119; A:)

Kursart (k)	Teiln. am UV (u)	Geschlecht (g)	Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
GK	Ja	M	29	Nein
LK	Ja	M	34	Nein
GK	Nein	M	11	Nein
LK	Nein	M	13	Nein
GK	Ja	J	40	Nein
LK	Ja	J	46	Nein
GK	Nein	J	17	Nein
LK	Nein	J	20	Nein

Die Teilnahme am Unterrichtsversuch bei den Jungen trägt deutlich zur Steigerung der Lösungswahrscheinlichkeit bei. Dabei erkennt man, dass die Schüler und Schülerinnen aus einem KLIP-Grundkurs besser abschneiden als die Schüler und Schülerinnen aus einem Kontroll-Leistungskurs.

Tabelle 11-25. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten für Aufgabe 2b (n=119; A:)

Kursart (k)	Computereinsatz (r)	Geschlecht (g)	Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
GK	Ja	M	31	Nein
LK	Ja	M	56	Ja
GK	Nein	M	5	Nein
LK	Nein	M	14	Nein
GK	Ja	J	46	Nein
LK	Ja	J	71	Ja
GK	Nein	J	10	Nein
LK	Nein	J	24	Nein

Die Variable Computereinsatz (**r**) diskriminiert die beiden Gruppen deutlich besser. Aus den KLIP-Leistungskursen können sowohl von den Jungen als auch von den Mädchen Wahrscheinlichkeiten größer als 0,5 erzielt werden. Auch die Grundkurse mit Computereinsatz besitzen höhere Chancen die Aufgabe zu lösen als unter Berücksichtigung der Unterrichtsversuchsteilnahme. Der bei den Leistungskursen beobachtete Anstieg ist jedoch wesentlich größer als der bei den Grundkursen. Daran lässt sich erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler eines Leistungskurses deutlich besser von dem Einsatz des Computers profitiert haben als die Schüler und Schülerinnen eins Grundkurses.

Zweite Konstellation. In der zweiten Konstellation werden aufgrund der signifikanten Korrelationen (vgl. Tabelle 15.8) und des Forschungsinteresses der Einfluss der Variablen **k, i, u, g** und **nlh** untersucht (vgl. Tabelle 15.10). Die Variation der Variablen und die Untersuchung möglicher Wechselwirkungen zeigen, dass lediglich die Variablen **k** und **u** signifikanten Einfluss auf die Gruppentrennung besitzen.

Tabelle 11-26. Informationen zur Modellanpassung (n=80, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	14,487	2	0,001
Mc Fadden	0,148		
Korrekte Klassifizierungen	71,3%		

Die Modellanpassung ist gut, Mc Faddens R^2 weist jedoch auf keine gute Erklärung des Gesamtmodells zur Gruppentrennung. Der Wert unter Einbeziehung der anderen Variablen liegt angesichts der großen Anzahl an Variablen mit nur 0,190 gering höher. Daraus lässt sich schließen, dass zur Deutung des Lösungsverhaltens weitere Variablen benötigt werden. Diese liegen hier nicht vor. Insofern wird das Augenmerk auf den Einfluss der einzelnen Variablen gerichtet.

Tabelle 11-27. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=80, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,373	1,373	6,020	1	0,014	3,949
UV teilg. (u)	1,702	0,588	8,386	1	0,004	5,487
Konstante	-5,540	1,466	14,291	1	0,000	0,004

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 11-28. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten für Aufgabe 2b (n=80, A:)

Kursart (k)	Teiln. am UV (u)	Vorhergesagte Lösungswahrs-cheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
GK	Ja	32	Nein
LK	Ja	65	Ja
GK	Nein	8	Nein
LK	Nein	25	Nein

Die Zugehörigkeit zu einem KLIP-Leistungskurs verspricht einer Schülerin bzw. einem Schüler die größten Aussichten auf Erfolg bei dieser Aufgabe. Aber auch eine Schülerin bzw. ein Schüler aus einem KLIP-Grundkurs hat bei Aufgabe 2b bessere Lösungswahrscheinlichkeiten als eine Schülerin bzw. ein Schüler aus einem Leistungskurs der Vergleichskurse. Das belegt deutlich den wesentlich größeren Einfluss der Variablen **u** als den der Variablen **k** auf die Gruppentrennung.

Zusammenfassung. In diesem Aufgabenteil mussten die Schülerinnen und Schüler Problemlösefähigkeiten und ein Verständnis des Mittelwertaspektes besitzen. Sowohl in der Gesamtpopulation als auch bei den Vergleichskursen ist deutlich geworden, dass die Schülerinnen und Schüler aus KLIP wesentlich größeren Erfolg besitzen. Die Leistungskurse erhalten dabei erwartungsgemäß die besseren Ergebnisse als die Grundkurse, doch wirkt sich die Teilnahme am Unterrichtsversuch deutlich stärker aus, so dass sogar der KLIP-Grundkurs bessere Ergebnisse als der Kontroll-Leistungskurs vorweist. Aufgrund der niedrigen Erfolgsaussichten bei den Kursen, die nicht an KLIP teilgenommen haben, kann man sogar von sehr wenig Besitz der erforderlichen Fähigkeiten sprechen. Den in Abschnitt 11.1.1 dargestellten Zusammenhang zwischen Note und Leistung im Test, der dort als möglicher Vorteil des KLIP-Leistungskurses diskutiert wurde, ist hier nicht zu beobachten.

Außergewöhnlich ist ebenfalls die Rolle des Computereinsatz bei dieser Aufgabe. Schülerinnen und Schüler, die den Computer zur Verfügung gestellt bekamen, waren bei dieser Aufgabe erfolgreicher. Man kann sogar davon sprechen, dass nur die Schülerinnen und Schüler aus einem KLIP-Leistungskurs mit Einsatz des Computers gute Lösungsaussichten besitzen. Ein leichter Vorteil der Jungen bei dieser Aufgabe lässt sich nur für die Gesamtpopulation bestätigen. Infolgedessen könnte man den Schülern bessere Problemlösefähigkeiten zusprechen. Es wird zu untersuchen sein, ob sich dieser Eindruck bestätigt.

11.3.3.4 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 2c

Die Schülerinnen mussten bei dieser Aufgabe ihre Lösungen des ersten und zweiten Aufgabenteils reflektieren, vergleichen und bewerten. Dazu war es erst einmal notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler die ersten beiden Aufgabenteile bearbeiteten. Ein erfolgreicher Vergleich benötigte den Approximationsaspekt der Integralrechnung. Während im Teil a der Mittelwert aus diskreten Werten bestimmt wurde und ein ungenaues Ergebnis *unter* dem Schwellenwert lieferte, konnte man mit Hilfe des Funktionsterms in Teil b den genauen Wert bestimmen, der exakt dem Schwellenwert entsprach, was eine Warnung an die Bevölkerung zur Folge hätte. Ihr Ergebnis mussten die Schülerinnen und Schüler sprachlich formulieren, da an dieser Stelle keine konkreten Rechnungen durchgeführt werden konnten. Zudem musste das in den ersten beiden Aufgabenteilen formulierte mathematische Modell wieder zurück zur Anwendung in der Realität transportiert werden. Insofern lässt sich die Aufgabe ebenfalls als Problemlöseaufgabe bezeichnen. Da jedoch der Problemlöseprozess die gesamte Aufgabe betrifft und es in diesem Teil stärker auf die Fähigkeit des rationalen Argumentierens und auf sprachliche Fähigkeiten ankommt, liegt der Beobachtungsschwerpunkt bei dieser Aufgabe auf diesen erforderlichen Fähigkeiten.

Da diese Fähigkeiten durch den Unterrichtsversuch gefördert werden sollten, ist anzunehmen, dass sich dies im Lösungsverhalten zeigt. Die Berücksichtigung sprachlicher Fähigkeiten wird darüber hinaus den Schülerinnen entgegenkommen, so dass auch in dieser Variablen ein möglicher Einfluss zu finden sein wird.

Korrelationen. Die einzige Variable mit einer nennenswerten Korrelation zum Lösungsverhalten ist die Note **nlh** (**0,231 (0,05)**) in der zweiten Konstellation. Dies könnte für die erste Konstellation einen Einfluss in der Variablen **sf** bedeuten. Das Modell unter Einbeziehung aller Variablen liefert einen schlechten Mc Fadden-Wert für das Gesamtmodell, so dass für ein reduziertes Modell ebenfalls kein guter Wert zu erwarten ist.

1. Konstellation. Da viele Schülerinnen und Schüler, vermutlich aufgrund fehlender Ergebnisse zu den Aufgaben 2a und 2b, keine Angaben zu dieser Aufgabe machten und bei Ausschluss dieser Fälle aus der Analyse eine Verzerrung der Ergebnisse zu befürchten ist, werden die Fälle mit „keiner Angabe" den nicht korrekt gelösten Fällen zugerechnet und auf dieser Grundlage eine Analyse für die Gesamtpopulation durchgeführt.

Tabelle 11-29. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	9,760	3	0,021
Mc Fadden	0,099		
Korrekte Klassifizierungen	76,5%		

Tabelle 11-30. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,032	0,468	4,862	1	0,027	0,356
Gymn. (sf)	1,656	0,821	4,066	1	0,044	5,239
UV teilg. (u)	0,907	0,521	3,030	1	0,082	2,477
Konstante	-4,289	1,940	4,887	1	0,027	0,014

Verknüpfungsfunktion: Logit

Die Schülerinnen und Schüler in KLIP an Gymnasien zeigen bei dieser Aufgabe tatsächlich besseres Lösungsverhalten, jedoch sind die Jungen signifikant erfolgreicher als die Mädchen. Das lässt sich damit erklären, dass die Jungen schon in den ersten beiden Teilen bessere Lösungswahrscheinlichkeiten aufwiesen und damit die Chance für die Mädchen nur sehr gering war, den zweiten Teil überhaupt zu lösen. Somit lässt sich vermuten, dass das Konzept von KLIP auch die Jungen in ihren sprachlichen Fähigkeiten gefördert hat. Der Einfluss von **sf** weist auf eine Untersuchung in der zweiten Konstellation hin. Es bestehen geringe Wechselwirkungen der Variablen **u** und **sf**, was ebenfalls an den vorhergesagten Lösungswahrscheinlichkeiten sichtbar wird.

Der Tabelle 11.31 kann man entnehmen, dass der Einfluss des Unterrichtsversuchs nicht auf den Leistungskurs der Gesamtschule zurückzuführen ist, sondern in erster Linie durch die gymnasialen KLIP-Kurse getragen wird, was die Wechselwirkungen innerhalb des Modells erklärt.

Tabelle 11-31. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten für Aufgabe 2c (n=119; A:)

Schulform (sf)	Teiln. am UV (u)	Geschlecht (g)	Vorhergesagte Lösungs-wahrscheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
Gym.	Ja	M	23	Nein
Ges.	Ja	M	5	Nein
Gym.	Nein	M	11	Nein
Gym.	Ja	J	45	Nein
Ges.	Ja	J	14	Nein
Gym.	Nein	J	25	Nein

Rechnereinsatz und Unterrichtsversuch. Dies bestätigt sich, wenn man die Modelle mit **u** und **g** und mit **r** und **g** miteinander vergleicht. Der Einfluss von **u** ist zwar noch vorhanden aber nicht mehr signifikant, während **r** eine fast doppelt so große odd ratio mit einem signifikanten Wald-Wert besitzt (vgl. Tabelle 15.12 und Tabelle 15.13).

Zweite Konstellation. Die Analyse in der zweiten Konstellation zeigt in der Variable **nlh** keinen signifikanten Einfluss, in der Variable Geschlecht (**g**) zeigen sich keine Veränderungen und der Einfluss der KLIP-Teilnahme (**u**) entspricht der in Tabelle 15.12 dargestellten Situation, so dass ein möglicher Einfluss der Variable Note zurückgewiesen und ansonsten der Argumentation der ersten Konstellation gefolgt werden kann.

Zusammenfassung. In diesem Aufgabenteil haben die Schülerinnen und Schüler, die mit dem Computer arbeiteten, deutlich gezeigt, dass sie besser rational argumentieren können und ein Verständnis des A-Aspektes besitzen. Der erwartete Vorteil der Mädchen hinsichtlich ihrer sprachlichen und argumentativen Fähigkeiten ist nicht zu beobachten. Vielmehr haben die Jungen gezeigt, dass sie in der Lage sind in adäquater Weise ihre Lösungen zu verbalisieren. Es ist jedoch denkbar, dass die Vorbedingungen aus den ersten beiden Aufgabenteilen die Jungen begünstigte.

11.3.3.5 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 3b

Schülerinnen und Schüler mit Problemlösefähigkeiten und argumentativen Fähigkeiten sollten am Besten in der Lage sein diese Aufgabe zu lösen. Es waren keine Kalkülfähigkeiten gefragt, sondern man musste in der Lage sein rein argumentativ das vorhandene Wissen auf die gegebene Situation anzuwenden. Dabei war es nicht möglich, ein exaktes Ergebnis zu bestimmen, sondern das Lösungsverfahren stand im Vordergrund. Schülerinnen und Schüler, die es gewohnt sind, Mathematik mit Anwendung von Kalkülen gleichzusetzen, sollten bei dieser Aufgabe mehr Schwierigkeiten haben als die Schülerinnen und Schüler, die während des Unterrichtsversuchs realitätsnahe Aufgaben bearbeiteten.

Inhaltlich werden mit dieser Aufgabe das Verständnis der Kumulation, des Gesamteffekts, des A-Aspektes und gegebenenfalls des M-Aspektes und des F-Aspektes abgefragt. Der Graph der Funktion könnte die Schülerinnen und Schüler dazu verleiten, die Maximalstelle der Funktion im gegebenen Intervall als die Lösung anzusehen. Das würde aber zeigen, dass sich die betreffenden Schülerinnen und Schüler nicht hinreichend mit dem Aufgabentext auseinandergesetzt hätten. Vermutlich werden die Schülerinnen und Schüler aus den KLIP-Kursen die Aufgabe besser lösen. Es stellt sich sogar die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler aus den Grundkursen von KLIP besser als die Schülerinnen und Schüler aus dem Kontroll-Leistungskurs diese Aufgabe lösen können. Zudem erfordert die Lösung der

Aufgabe sprachliche und argumentative Fähigkeiten, wodurch ein Geschlechtervergleich wiederum sehr interessant ist. Somit werden die Variablen **u**, **k** und **g** in die Analyse einbezogen.

Korrelationen. Darüber hinaus sind die Variablen mit signifikanter Korrelation mit der Variable **va3b** einzubeziehen (vgl. Tabelle 15-14): **u (0,265 (0,05)), g (-0,235 (0,05), i (0,197 (0,05)), r (0,245 (0,01))** für die erste Konstellation und für die Vergleichskursen **k (0,240(0,05)), nlh (0,241(0,05)), u (0,265 (0,05)), g (-0,303 (0,01)), i (0,351 (0,01)).**

Tabelle 11-32. Informationen zur Modellanpassung (n=117, A: 9, 62)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	24,802	3	0,000
Mc Fadden	0,254		
Korrekte Klassifizierungen	76,9%		

Tabelle 11-33. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=117, A: 9, 62)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,804	-1,804	12,298	1	0,000	0,165
Gymn. (sf)	1,500	0,687	4,760	1	0,029	4,480
UV teilg. (u)	2,204	0,649	11,512	1	0,001	9,057
Konstante	-4,971	1,816	7,498	1	0,006	0,007

Verknüpfungsfunktion: Logit

Weder die Kursart (**k**) noch das Interesse (**i**) haben einen signifikanten Einfluss in einem gut angepassten Gesamtmodell, das ebenfalls gut zur Gruppentrennung beiträgt. In dem um diese beiden Variablen reduzierten Modell existieren zwei Ausreißer, die aber nicht weiter diskutiert werden, da das Modell vor Ausschluss dieser Ausreißer ebenfalls in den drei Variablen signifikant war, lediglich das Gütemaß für die Gruppentrennung hat sich verbessert. Der Einfluss der Schulform deutet wiederum auf eine Analyse der zweiten Konstellation hin. Das Geschlecht der Jungen und die Teilnahme am Unterrichtsversuch haben großen Einfluss auf die Gruppentrennung bei dieser Aufgabe. Damit zeigen die Jungen, ebenso wie in der letzten Aufgabe, ausgeprägte Problemlösefähigkeiten, argumentatives Geschick und das Verständnis der oben genannten Begriffe. Eine Einzelanalyse der Lösungen zeigt unter diesen Begriffen insbesondere den Kumulationsaspekt, den Gesamteffekt und den A-Aspekt vertreten. Selten wurde über den F-Aspekt argumentiert, was ein Hinweis darauf wäre, warum die Schülerinnen und Schüler aus den Kontrollkursen so schwach abgeschnitten haben. Das Modell zeigt Wechselwirkungen zwischen **u** und **sf**. In Einzelmodellen sinkt der Einfluss beider Variablen (odd ratio von **u**: 5,8 und von **sf**: 2,0), während die Signifikanz nur bei **sf** verloren geht (**u**: 0,004; **sf**: 0,28). Ein Blick auf die Abbildung 11.6 erklärt die Situation: Die Verhältnisse der Lösungswahrscheinlichkeiten des Kurses LKUO und der anderen KLIP-Kurse sind kleiner als die Verhältnisse der Lösungswahrscheinlichkeiten dieses Kurses und den gymnasialen Kursen, da der einzige Kurs, der bei dieser Aufgabe schwächere Ergebnisse als der LKUO erzielte, der Vergleichskurs GKOO ist. Verwunderlich erscheint auch der fehlende Einfluss der Leistungskurse. Betrachtet man jedoch die Lösungshäufigkeiten zu dieser Aufgabe (vgl. Abbildung 11.6), so sieht man, dass die Leistungskurse LKOO und LKUO mit 29% und 21% nicht die vordersten Plätze belegen.

Computereinsatz und Unterrichtsversuch. Der Austausch von **u** gegen **r** lässt den Einfluss von **sf** verschwinden (vgl. Tabelle 15-16), was die oben genannte Wechselwirkung noch einmal belegt. **r** behält in dieser Konstellation nahezu identisch die Werte von **u** bei, im Einzelmodell jedoch ist der Einfluss von **r** größer als der von **u** (odd ratio von **r**: 6,8 und Sig.: 0,000, odd ratio von **u**: 5,8), so dass bei dieser Aufgabe der Einfluss von **r** innerhalb von **u** separiert werden kann.

Zweite Konstellation. In der zweiten Konstellation sind die Variablen **u, g** und **i** von relevanter Bedeutung (vgl. Tabelle 15.17 bis 15.20). Am Stärksten vertreten sind die Variablen **g** und **u** mit odd ratios von ca. 1/15 bzw. 15, was auf einen großen Einfluss schließen lässt. Nach Entfernen von zwei Ausreißern, die die Werte in den Variablen **u** und **g** nicht wesentlich ändern, aber zu besseren Gütemaßen beitragen, wird der Signifikanzwert des Interesses etwas vermindert, welches sich aber mit odd ratios von 0,29 (ungern), 1,39 (teils teils) und 2,46 (gern) dennoch entlang der Kategorien einflussreich zeigt. Wechselwirkungen liegen keine vor, so dass alle drei Variablen für alle Gruppen bedeutsam sind. So zeigt der direkte Vergleich der Kontrollkurse, dass die Teilnahme am Unterrichtsversuch auch hier deutlich zur erfolgreichen Bearbeitung dieses Aufgabentyps beträgt. Die Jungen behalten ihre dominante Stellung, was durch die vorhergesagten Lösungswahrscheinlichkeiten noch einmal deutlich wird. Auch der Einfluss von KLIP zeigt sich noch einmal relevant.

Tabelle 11-34. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten für Aufgabe 3b (n=80, A:)

Interesse (i)	Teiln. am UV. (u)	Geschlecht (g)	Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
ungern	Ja	M	5	Nein
teils teils	Ja	M	21	Nein
gern	Ja	M	32	Nein
ungern	Nein	M	0	Nein
teils teils	Nein	M	2	Nein
gern	Nein	M	3	Nein
ungern	Ja	J	42	Nein
teils teils	Ja	J	78	Ja
gern	Ja	J	86	Ja
ungern	Nein	J	5	Nein
teils teils	Nein	J	19	Nein
gern	Nein	J	29	Nein

Zusammenfassung. Ähnlich wie in der letzten Aufgabe zeigen Schülerinnen und Schüler, die am Unterrichtsversuch beteiligt waren, bessere Leistungen als die Schülerinnen und Schüler, die nicht an KLIP beteiligt waren. Dabei heben sich die Jungen besonders heraus. Das bedeutet, dass auch bei dieser Aufgabe noch einmal die ausgeprägtere Problemlösefähigkeiten bei den Jungen bestätigt werden. Eine besondere Förderung, die den Mädchen durch KLIP zu Teil werden sollte, ist nicht zu bemerken. Ob die Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen kleiner geworden sind, lässt sich anhand dieser Zahlen nicht bestätigen. In dieser Aufgabe mussten neben den Problemlösefähigkeiten auch das inhaltliche Verständnis des A-Aspektes, des F-Aspektes, der Kumulation und des Gesamteffekts gezeigt werden, das bei den Schülerinnen und Schülern aus KLIP deutlich besser vorhanden sind. Der Computereinsatz zeigt gegenüber der Teilnahme an KLIP stärkeren Einfluss auf das Lösungsverhalten, was sowohl durch die Visualisierungs- als auch durch die Rechenkompetenz des Computers erklärt werden kann.

11.3.3.6 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 3c

In diesem Aufgabenteil mussten die Schülerinnen und Schüler entweder mit Hilfe des S-Aspektes oder des F-Aspektes bzw. des Kumulationsaspektes erkennen, dass die Schnittstelle des angegebenen Funktionsgraphen mit der x-Achse die Stelle anzeigt, an der die maximale Temperatur erreicht wird. Vermutlich werden, wie schon im letzten Aufgabenteil beschrieben, einige Schülerinnen und Schüler, die diese Aspekte nicht entwickeln oder lernen konnten, die Maximalstelle der Funktion im angegebenen Intervall als Lösung ausmachen.

Forschungsfragen und Hypothesen. Hier gelten dieselben Annahmen wie in Abschnitt 11.3.3.5 zu Aufgabe 3b.

Korrelationen. Kursart **k** (**0,220 (0,05)**), Geschlecht **g** (-**0,267 (0,01)**) und Schule **s** (-**0,238 (0,05)**) werden auf Grund ihrer signifikanten Korrelationen mit dem Lösungsverhalten in der ersten Konstellation (vgl. Tabelle 15-21) näher untersucht. In der zweiten Konstellation zeigen sich **k** (**0,324 (0,01)**), Geschlecht **g** (-**0,337 (0,01)**) und Interesse **i** (**0,266 (0,05)**) signifikant.

Erste Konstellation. Die Variable **s** zeigt signifikanten Einfluss auf die Gruppentrennung der abhängigen Variable bei der Gesamtpopulation. Dieser Einfluss wird von der ersten Schule mit den Leistungskursen LKUC und LKOO ausgeübt. Dadurch entstehen Wechselwirkungen mit **k**. Aufgrund des Forschungsinteresses wird **s** entfernt und die Dominanz der ersten Schule wird in der zweiten Konstellation problematisiert. Das Modell mit den verbleibenden Variablen enthält starke Wechselwirkungen der Variablen **sf** mit **k** und mit **u**. Ein Vergleich mit Tabelle 15.23 und der Abbildung 11.6 offenbart eine mögliche Ursache für die Wechselwirkungen, die im Wesentlichen wiederum mit den schwachen Ergebnissen des Gesamtschul-Leistungskurs LKUO zu begründen sind. Deswegen wird auch die Variable **sf** entfernt und Veränderungen zur ersten Konstellation werden in der zweiten Konstellation studiert. Es verbleibt ein wechselwirkungsfreies Modell mit den Variablen **k, u** und **g**.

Tabelle 11-35. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	13,352	3	0,004
Mc Fadden	0,106		
Korrekte Klassifizierungen	79%		

Tabelle 11-36. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,253	0,516	5,904	1	0,015	0,286
LK (k)	0,843	0,494	2,918	1	0,088	2,324
UV teilg. (u)	0,739	0,548	1,818	1	0,178	2,094
Konstante	-2,058	1,472	1,954	1	0,162	0,128

Verknüpfungsfunktion: Logit

Alle drei Variablen haben bei schlechter Trennungsgüte für das Gesamtmodell Einfluss als einzelne Variablen. Dabei ist der Einfluss von **g** und **k** signifikant. Durch Ausschluss der Ausreißer lässt sich eine Trennungsgüte von 0,267 erreichen, da die odd ratio der einzelnen Einflüsse sich jedoch kaum verändert, wird an dieser Stellte darauf verzichtet.

Computereinsatz und Unterrichtsversuch. Der Vergleich der Variablen **u** gegen **r** zeigt im wechselwirkungsfreien verminderten Modell zusammen mit **g** Vorteile zu Gunsten des Computereinsatzes (vgl. Tabellen 15-24 bis 15-27). Analog zu den Beobachtungen bei der letzten Aufgabe scheint der Einsatz des Computers durch eine stärkere Förderung im Begriffsbildungsprozess die Lösung von problemorientierten, anschauungsbasierten Aufgaben zu unterstützen.

Zweite Konstellation. Die Einbeziehung der Variablen **k, g, u** und **i** in die zweite Konstellation weist einen nicht signifikanten Einfluss der Variable Interesse auf. Obwohl die odd ratio und die Signifikanz der zweiten Ausprägung „gern" in einem guten Bereich liegen, ist die Gesamtbewertung der Variable nicht ausreichend für eine Aufnahme in dieses Modell. Nach Ausschluss dieser Variable zeigen sich alle drei verbleibenden Variablen signifikant. Dieser Effekt verstärkt sich noch, nachdem drei Ausreißer mit hohem Pearson-r ausgeschlossen wurden.

Tabelle 11-37. Informationen zur Modellanpassung (n=116, A: 9, 55, 57)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	49,130	3	0,000
Mc Fadden	0,376		
Korrekte Klassifizierungen	83,1%		

Tabelle 11-38. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=116, A: 9, 55, 57)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	2,163	0,874	6,128	1	0,013	8,694
Mädchen (g)	-3,206	1,000	10,280	1	0,001	0,041
UV teilg. (u)	2,368	0,912	6,741	1	0,009	10,679
Konstante	-4,124	2,223	3,441	1	0,064	0,016

Verknüpfungsfunktion: Logit

Bei den Ausreißern handelt es sich um eine Schülerin aus einem Leistungskurs, die die Aufgabe korrekt lösten und um zwei Jungen aus einem Grundkurs, die die Aufgabe nicht lösen konnten. Die Werte dieser beiden Variablen werden bei dieser kleinen Population natürlich in einem hohen Maße verstärkt. Lediglich die Variable **u** befindet sich auch bei Berücksichtigung der Ausreißer in einem ähnlichen Bereich.

Zusammenfassung. Damit lassen sich die in der ersten Konstellation beobachteten relevanten Variablen bestätigen. Die Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) ist in dieser Konstellation mit dem Computereinsatz (**r**) identisch, so dass auf Grund der ersten Konstellation von einem bedeutungsvollen Anteil der Variable **r** ausgegangen werden kann. Somit sind Jungen aus einem Leistungskurs, die innerhalb des Projektes KLIP den Computer benutzt haben, in besonderer Weise in der Lage, problemorientierte Aufgaben, in denen auf Basis geometrischer Zusammenhänge argumentative Fähigkeiten gefordert sind, zu lösen. Trotzdem muss an dieser Stelle noch einmal auf den explorativen Charakter dieser Studie eingegangen werden. Die Populationsgröße ist vergleichsweise gering und bezieht man die Klassifizierung der Schulformen aus der TIMS-Studie (vgl. Abschnitt 9.3) mit ein, so lässt sich die Schwäche des Kurses aus der Gesamtschule allein mit der Variable **sf** erklären, so dass eine besondere Bedeutung der Variable **r** innerhalb der KLIP-Teilnahme gar nicht vorliegen muss.

Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten bei Aufgabe 4

Die Teilaufgaben der Aufgabe 4 sollten das Verständnis der einzelnen Integralaspekte abfragen. Die Aufgaben wurden so konzipiert, dass die Schülerinnen und Schüler zuerst eine im Aufgabentext formulierte Aussage ablehnen, ihr zustimmen oder keines der beiden Verhalten zeigen konnten (vgl. Anhang B. 15.1.1). Alsdann sollten sie ihr Verständnis durch eigene Ausführungen darlegen. Die Testauswertung hat gezeigt, dass einige Schülerinnen und Schüler den zweiten Teil der Aufgaben nicht bearbeitet, jedoch eine Antwort angekreuzt haben. Eine zentrale Fragestellung dieser Arbeit (vgl. Abschnitt 11.1.2) behandelt das Verständnis der einzelnen Integralaspekte. Dieses kann allein durch eine korrekt angekreuzte Aufgabe nicht demonstriert werden, sondern es gehört die sprachlich argumentative Darstellung des Wissens dazu. Aus diesem Grund wird für die Auswertung der Aufgabe 4 in dieser Arbeit nur der zweite Teil der Aufgabenbearbeitung berücksichtigt. Die Frage nach möglichen Zusammenhängen zwischen beiden Bearbeitungsteilen wird in nachfolgenden Arbeiten analysiert. Ein Aufgabenteil gilt somit als inhaltlich verstanden, wenn die Schülerin bzw. der Schüler ein Verständnis des jeweiligen Aspektes nachweisen kann. Die gesamte Aufgabe 4 kann somit dem Bereich Verständnisaufgaben zugeordnet werden, wobei im Einzelnen noch detaillierte Unterscheidungen vorgenommen werden.

11.3.3.7 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 4a

Dieser Aufgabenteil beinhaltet den M-Aspekt der Intergralrechnung. Die Schülerinnen und Schüler mussten ihr Verständnis dieses Aspektes durch eigene Ausführungen nachweisen. Dazu konnten sie neben selbst gewählten Bezügen auf die Aufgabe 2 verweisen, die gerade diesen Aspekt als zentralen Bestandteil besitzt. Es sind auch Bezüge zum Mittelwertsatz der Integralrechnung denkbar, die in korrekter Darstellung als Lösung akzeptiert wurden.

Forschungsfragen und Hypothesen. Für diese Aufgabe gilt im Großen und Ganzen dasselbe wie für die zweite Aufgabe. Es ist zu vermuten, dass die Schülerinnen und Schüler aufgrund ihrer Erfahrung mit den Intentionalen Problemen bei dieser Aufgabe größere Lösungschancen besitzen als Schülerinnen und Schüler aus den Vergleichskursen, da insbesondere der Verweis auf Aufgabe 2 einer korrekten Lösung entspricht, soweit diese inhaltlich verstanden wurde. Da in dieser Aufgabe kein konkretes Problem gestellt, sondern die Darstellung allgemeiner Zusammenhänge verlangt wurde, die insbesondere Schülerinnen und Schüler mit vorrangig prädikativ ausgeprägten Denkstrukturen besser aktivieren müssten, steht hier zu vermuten, dass die Mädchen die größeren Lösungswahrscheinlichkeiten besitzen. Der mögliche Bezug zur Aufgabe 2 relativiert diese Vermutung jedoch, da die Vernetzung, die hier zu leisten ist, offensichtlich ist und damit der Bezug zu einem konkreten Problem wiederum gegeben ist. In diesem Fall wird ein Vergleich mit den anderen Aufgabenteilen der Aufgabe 4 von Interesse sein.

Korrelationen. Darüber hinaus sind die Variablen mit signifikanter Korrelation mit der Variable **va4a** einzubeziehen (vgl. Tabelle 15-28): **k (0,222 (0,05)), g (-0,216 (0,05)), i (0,245 (0,01)), r (0,191 (0,05))** für die erste Konstellation und für die Vergleichskurse **k (0,526 (0,01)), g (-0,303 (0,01)), i (0,421 (0,01)).** Die Schulform ist in diesem Fall nicht hochkorreliert, die Korrelationen in der zweiten Konstellation liegen dennoch höher.

Erste Konstellation. Die Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) hat keinen relevanten Einfluss auf die Lösungswahrscheinlichkeiten. Aus diesem Grund wird die Variable **r** direkt in das Modell aufgenommen. Die Schulform (**sf**) zeigt mit den Variablen der Kursart (**k**) und dem Computereinsatz (**r**) Wechselwirkungen. Bei Berücksichtigung von **sf** steigt der Einfluss der Kursart zu Gunsten der Leistungskurse und der Einfluss des Computereinsatzes sinkt zu Ungunsten der Kurse mit Computer. Dies erklärt sich unter Einbeziehung der Abbildung 11.6. Der Kurs LKUO hat mit nur 10,5% Lösungshäufigkeit die Aufgabe inhaltlich verstanden. Da dieser Kurs ein Leistungskurs ist, aber ohne Computereinsatz gearbeitet hat, müssen die Einflüsse der beiden Variablen sich entsprechend verändern. Die Variable wird unter Kenntnisnahme ihres Einflusses, der sich im Einzelmodell durch eine odd ratio von 1,8 bei einer Signifikanz von 0,085 zeigt, dem Modell entnommen. Bei den Variablen **i** und **k** zeigen sich Wechselwirkungen, so dass die beiden Variablen getrennt untersucht werden. Aus diesem Grund sind die Gütemaße des Gesamtmodells geringer als bei einem vollständigen Modell.

Tabelle 11-39. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	23,243	3	0,000
Mc Fadden	0,165		
Korrekte Klassifizierungen	74,8%		

Tabelle 11-40. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,726	0,567	9,271	1	0,002	5,617
Mädchen (g)	-1,104	0,488	5,115	1	0,024	0,332
Computereinsatz (r)	2,019	0,600	11,338	1	0,001	7,533
Konstante	-5,048	1,663	9,211	1	0,002	0,006

Verknüpfungsfunktion: Logit

In diesem Modell bestehen ebenfalls Wechselwirkungen zwischen den Variablen **k** und **r**, was aus den Tabellen 15.29 & 15.30 zu entnehmen ist. Die den Variablen zugehörigen Werte sinken in den reduzierten Modellen. Dies liegt wiederum an dem Kurs LKUO, aber auch am Grundkurs GKOO1, in dem keine Schülerin die Aufgabe korrekt gelöst hat. Dies wird ebenfalls deutlich in dem nachfolgenden Modell, in dem der Einfluss des Computereinsatzes (**r**) auf einen odd ratio-Wert von 3,856 sinkt.

Tabelle 11-41. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	19,729	4	0,001
Mc Fadden	0,156		
Korrekte Klassifizierungen	73,9%		

Tabelle 11-42. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,081	0,472	5,260	1	0,022	0,339
Interesse			6,369	2	0,041	
ungern (i)	-0,829	0,407	4,140	1	0,042	0,437
teils teils (i)	0,053	0,334	0,025	1	0,874	1,054
Computereinsatz (r)	1,350	0,485	7,729	1	0,005	3,856
Konstante	-1,649	0,952	3,000	1	0,083	0,192

Verknüpfungsfunktion: Logit

Es zeigt sich, dass der Computereinsatz (**r**), die Zugehörigkeit zum LK (**k**) und das Interesse (**i**) signifikanten Einfluss auf die Gruppentrennung bei dieser Aufgabe besitzen, wobei der Einfluss von **r** ein wenig größer als der der anderen beiden Variablen ist. Die Jungen weisen in den Lösungen dieser Aufgabe, anders als zuvor angenommen, bessere Fähigkeiten als die Mädchen nach, was vermutlich mit dem oben genannten Bezug zur Aufgabe 2 begründbar ist. Der Einfluss der Jungen ist auch im Vergleich zu den anderen Aufgaben nicht schwächer geworden. Überraschend ist das starke Gewicht des Computereinsatzes (**r**) bei gleichzeitigem unbedeutenden Einfluss des Unterrichtsversuchs (**u**). Das wird auf den am Unterrichtsversuch beteiligten Leistungskurs zurückzuführen sein, der keinen Computer zur Verfügung hatte. Vielmehr gelangte dieser Kurs, wie schon erwähnt, nicht zur abschließenden Lösung der Probleme, wodurch auch der Mittelwertbegriff nicht ausgebildet werden konnte. Diese Interpretation wird zusätzlich durch die hohen Einflusswerte von **sf** und die starken Wechselwirkungen mit dieser Variablen gerechtfertigt. Ob sich der Unterrichtsversuch in der zweiten Konstellation einflussstärker zeigt, wird zu untersuchen sein.

Das Interesse (**i**) hat ebenfalls Einfluss auf die Gruppentrennung, jedoch geringeren als die anderen Variablen. Zugleich sind in allen drei Ausprägungen Wechselwirkungen mit den Ausprägungen der Kursart (**k**) zu beobachten, und zwar wenig Interesse mit Grundkurs und viel Interesse mit Leistungskurs. Die Variable zeigt jedoch auch ohne Bezugnahme zum Leistungskurs Einfluss auf die Gruppentrennung (vgl. Tabelle 15-31). Eine Interpretation, die das Verständnis des Mittelwertaspektes mit besonders großem Interesse in Verbindung setzt, halte ich jedoch auf Grundlage des vorhandenen Datenmaterials für gewagt.

Zweite Konstellation. In dieser Konstellation werden die Variablen **k, g**, **u** und **i** berücksichtigt. Die Variable **i** zeigt sich jedoch, trotz ihrer signifikanten Korrelation mit dem Lösungsverhalten, nicht einflussstark. Es gibt zwei Ausreißer mit sehr hohen Abweichungen der Residuen, so dass sie ausgeschlossen werden. Da es sich bei den Ausreißern um Schülerinnen und Schüler handelt, die diese Aufgabe lösen konnten und am Unterrichtsversuch beteiligt waren, sinkt das Signifikanzniveau von **u** um 4,6%.

Tabelle 11-43. Informationen zur Modellanpassung (n=78, A: 58,59)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	35,325	3	0,000
Mc Fadden	0,398		
Korrekte Klassifizierungen	82,1%		

Tabelle 11-44. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=78, A: 58, 59)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	3,405	0,884	14,842	1	0,000	30,106
Mädchen (g)	-1,767	0,782	5,109	1	0,024	0,171
Teiln. am UV (u)	1,199	0,780	2,361	1	0,124	3,317
Konstante	-5,853	2,143	7,459	1	0,006	0,003

Verknüpfungsfunktion: Logit

Der von **r** in der ersten Konstellation getragene Einfluss geht in dieser Konstellation auf **u** über. Im Verhältnis zu **k** und **g** wirkt sich der Unterrichtsversuch (**u**) nur nachrangig aus, was aus der Übersicht der vorausgesagten Lösungswahrscheinlichkeiten sehr deutlich hervorgeht. Insbesondere der sehr starke Einfluss des Leistungskurses, der sich in der ersten Konstellation wesentlich schwächer zeigte, wird ausgebaut. So lässt sich nur für die Jungen aus dem Leistungskurs eine positive Lösungswahrscheinlichkeit voraussagen.

Tabelle 11-45. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten (n=78, A: 58, 59)

Kursart (k)	Teiln. am UV (u)	Geschlecht (g)	Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
LK	Ja	M	45	Nein
GK	Ja	M	3	Nein
LK	Nein	M	20	Nein
GK	Nein	M	1	Nein
LK	Nein	J	60	Ja
GK	Ja	J	14	Nein
LK	Ja	J	83	Ja
GK	Nein	J	5	Nein

Die Abstände der vorhergesagten Lösungswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Kategorien einer Variablen sind verhältnismäßig groß. Der Abstand zwischen Jungen und Mädchen im Leistungskurs beträgt ca. 40%. Der Abstand zwischen Jungen im Leistungskurs und Jungen im Grundkurs bewegt sich sogar zwischen 60% und 70%, während der Abstand zwischen den Schülerinnen und Schülern in der Variable **u** geringer ausfällt.

Zusammenfassung. Die Aufgabe verlangte von den Schülerinnen und Schülern die Fähigkeit, ihr Verständnis des Mittelwertaspektes angemessen, das heißt rational schlüssig begründet, darzulegen. Durch den Bezug zur Aufgabe 2 war es dennoch möglich, die Aufgabe auch durch einen Verweis auf diese Aufgabe korrekt zu lösen. Diesen Weg haben viele Schülerinnen und Schüler gewählt. Insofern relativieren sich die zu Beginn dieses Abschnitts aufgestellten Hypothesen. Vielmehr stellt sich die Frage nach der Abhängigkeit des Lösungsverhaltens bei den beiden Aufgaben. Diese Frage soll im weiteren Verlauf dieses Kapitels beantwortet werden.

Als relevante Faktoren für die Lösungsfähigkeit bei dieser Aufgabe für die Gesamtpopulation stellen sich der Reihenfolge nach die Kategorien Leistungskurs, Computereinsatz, Junge, Schulform und Interesse heraus. Dabei sind Jungen aus einem Leistungskurs mit Computereinsatz besonders stark. Ein Einfluss der KLIP-Teilnahme kann erst in der zweiten Konstellation beobachtet werden. Dieser steht gegenüber den deutlich gewichtigeren Variablen **k** und **g** jedoch im Hintergrund. Es lässt sich vermuten, dass der Einfluss von **u** im Wesentlichen auf die Variable **r** des Computereinsatzes zurückgeht, wobei eine äquivalente Erklärung auch in den schwachen Leistungen des Gesamtschul-Leistungskurses zu sehen ist. In beiden Fällen liegt zumindest ein Einfluss der KLIP-Teilnahme vor. Unterstellt man keine Abhängigkeit dieser Aufgabe von Aufgabe 2, so besitzen die oben genannten Gruppen ein besseres Verständnis des M-Aspektes. Im Falle der Abhängigkeit lassen sich die Analyseergebnisse der zweiten Aufgabe auf diese Aufgabe übertragen.

11.3.3.8 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 4b

In diesem Aufgabenteil mussten die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis des F-Aspektes zeigen, d.h. sie mussten in eigenen Worten darlegen, ob sie den Unterschied zwischen Flächenberechnung und Integralbestimmung kennen.

Forschungsfragen und Hypothesen. Die Schülerinnen und Schüler aus den KLIP-Kursen konnten während des Unterrichtsversuchs verschiedene Integralaspekte im Rahmen der Bearbeitung realitätsnaher Aufgaben entwickeln. Die Kenntnis unterschiedlicher Facetten eines Begriffs kann hinsichtlich der Abgrenzung von Einzelaspekten sehr förderlich sein. Die Aufgaben des Wasserverbrauchs und des Geschlechterwachstums geben vielfältige Möglichkeiten der Problematisierung des F-Aspektes und der Abgrenzung gegenüber den anderen Aspekten. Dies spricht für einen Vorteil auf Seiten der Schülerinnen und

Schüler, die am Unterrichtsversuch teilgenommen haben. Andererseits konnten die Schülerinnen und Schüler der Vergleichskurse während ihres Unterrichts diesen Aspekt an vielen Übungsaufgaben, die mit der ersten Aufgabe vergleichbar sind, kennen lernen (vgl. Abschnitt 11.1.1.1). Es wird sich zeigen, ob dies zur Dominanz einer dieser beiden Gruppen führt.

Diese Aufgabe ist mit 31,1% die Aufgabe mit den zweithöchsten Lösungshäufigkeiten (vgl. Abbildung 11.2), was darauf hindeutet, dass der F-Aspekt der Aspekt ist, der den Schülerinnen und Schülern am Geläufigsten ist. Darüber hinaus ist, wie schon im letzte Abschnitt ausgeführt, der Geschlechteraspekt von Interesse. Nach den Ausführungen in Kapitel 5 liegt die Priorität der Mädchen auf dem prädikativen Denken, das sich insbesondere bei der Bearbeitung von Verständnisaufgaben zeigen kann. Die letzten Aufgaben weisen auf eine Dominanz der Jungen hin. Aus diesem Grund ist es denkbar, dass diese Dominanz geringer wird oder sich zu Gunsten der Mädchen verkehrt. Die Lösungswahrscheinlichkeiten in Abbildung 11.3 deuten ebenfalls auf einen Einfluss der Mädchen hin.

Korrelationen. In der ersten Konstellation ist keine Variable signifikant (vgl. Tabelle 15-32), so dass das Hauptaugenmerk auf die durch die Forschungsfragen generierten Variablen liegt. Die Variable Kursart **k** (**0,245 (0,05)**) zeigt sich als einzige Variable in der zweiten Konstellation mit der Aufgabe hochkorreliert.

Erste Konstellation. Die Variable **sf** hat keinen Einfluss auf die Gruppentrennung und zeigt aufgrund der schon aus den anderen Aufgaben bekannten Wechselwirkungseigenschaften mit **k, u** und **r** etwas bessere Werte, so dass nachfolgend nur Modelle ohne **sf** betrachtet werden.

Tabelle 11-46. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	3,968	4	0,265
Mc Fadden	0,031		
Korrekte Klassifizierungen	68,9%		

Tabelle 11-47. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	0,603	0,423	2,033	1	0,154	1,827
Mädchen (g)	0,311	0,425	0,536	1	0,464	1,365
Teiln. am UV (u)	0,574	0,451	1,617	1	0,203	1,775
Konstante	-3,125	1,284	5,924	1	0,015	0,044

Verknüpfungsfunktion: Logit

Die Gütemaße für das Gesamtmodell sind sehr schlecht. Auch die Einbeziehung aller Variablen erhöht diese Werte nicht wesentlich. Dies deutete sich schon in den nicht vorhandenen mit der Aufgabe signifikant korrelierenden Variablen an. Insofern lässt sich an dieser Stelle nur sehr bedingt etwas über den Einfluss der Einzelvariablen sagen. Die Mädchen (**g**) haben, anders als angenommen, keinen signifikanten Einfluss auf die Gruppentrennung. Doch lässt sich zumindest konstatieren, dass die in den anderen Aufgaben zu beobachtete Dominanz der Jungen hier nicht wiederzufinden ist. Angesichts des schlechten Mc Fadden zeigen die Variablen **k** und **u** ganz geringen, aber nicht signifikanten Einfluss auf die Gruppentrennung, d.h. eine Schülerin bzw. ein Schüler aus einem gymnasialen KLIP-Leistungskurs hat minimal bessere Chancen, die Aufgabe zu lösen, als andere Schülerinnen und Schüler. Aber auch eine Interpretation, der F-Aspekt sei bei allen Schülerinnen und Schülern gleichermaßen vorhanden, ließe sich zustimmen. Insofern kann keiner der Variablen relevanter Einfluss zugesprochen werden.

Computereinsatz und Unterrichtsversuch. Die Variable **r** zeigt beim Austausch mit **u** Wechselwirkungen mit der Variable **k**, so dass hinsichtlich eines Vergleiches nur die Einzelmodelle betrachtet werden. Hier zeigen sich jedoch keine nennenswerten Unterschiede (**r**: odd ratio: 1,9 Sig.: 0;112; **u**: odd ratio: 1,8 Sig.: 0;190).

Zweite Konstellation. Nach Berücksichtigung aller Variablen zeigt sich, dass nur die Variable **k** signifikanten Einfluss besitzt. Der Teilnahme an KLIP kann zudem minimaler aber nicht signifikanter Einfluss zugestanden werden.

Tabelle 11-48. Informationen zur Modellanpassung (n=80, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	90,628	2	0,000
Mc Fadden	0,098		
Korrekte Klassifizierungen	71,3%		

Tabelle 11-49. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=80, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,177	0,518	5,158	1	0,023	3,245
Teiln. am UV (u)	0,791	0,524	2,277	1	0,131	2,205
Konstante	-3,777	1,249	9,148	1	0,002	0,023

Verknüpfungsfunktion: Logit

Anbetracht des schwachen Gesamtbeitrags zur Gruppentrennung sind die Beiträge der Einzelvariablen zwar einflussreich, aber für das Gesamtmodell nicht erklärend.

Zusammenfassung. In der Gesamtpopulation zeigt sich keine Gruppierung als signifikant hinsichtlich der Problemlösung. Die Untersuchung zeigt zwar nicht mehr das in den vorangehenden Aufgaben explorierte ungleiche Chancenverhältnis zu Lasten der Mädchen, doch präsentieren die Mädchen sich nicht stärker als die Jungen. Insofern kann dem vermuteten Vorteil der Mädchen aufgrund der unterstellten prädikativen Denkstrukturen nur im Vergleich zu den anderen Aufgaben zugestimmt werden. In der Analyse der Schulen mit den Vergleichskursen ist eine leichte Dominanz der Leistungskurse und der KLIP-Kurse zu erkennen. Insofern ließe sich bedingt der These zustimmen, dass der Flächeninhaltsaspekt bei den Schülerinnen und Schülern des Unterrichtsversuchs etwas besser verstanden wurde. Allein auf Basis dieser Aufgabe lässt sich eine solche Vermutung jedoch nicht aufrecht halten. Ein Vergleich mit den anderen Aufgaben, in denen der F-Aspekt ebenfalls problematisiert wird, wird in Abschnitt 11.3.4 durchgeführt.

11.3.3.9 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 4c

In diesem Aufgabenteil mussten die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnis des Zusammenhangs von Integral- und Differentialrechung darlegen. Die Kenntnis der Fachwörter „Differenzieren“ und „Integrieren“ wurde vorausgesetzt. Auch wenn die an KLIP beteiligten Kurse ihre eigene Fachsprache entwickeln konnten, sollten die in der mathematischen „community“ benutzten Fachbegriffe den Schülerinnen und Schülern zur Kenntnisnahme angegeben werden.

Forschungsfragen und Hypothesen. Die Kenntnis des S-Aspektes wird wesentlich durch den Hauptsatz der Differentialrechnung und der Integralrechnung gefördert. Ein

Verständnis der Ableitung als Änderungsrate und des Integrals als Gesamteffekt schafft eine geeignete Interpretation. Dabei wird das Verständnis dieses Zusammenhangs durch seine Veranschaulichung mit Hilfe von Funktionsgraphen und der engen Beziehung zwischen Differentations- und Integrationsregeln unterstützt. Die Aufgabe zum Geschlechterwachstum lösten die meisten Schülerinnen und Schüler auf Grundlage des Zusammenhangs von Änderungsrate und Gesamteffekt (vgl. Kapitel 10). Sie erforschten an dieser Aufgabe einen Großteil der Integrationsregeln und die Uneindeutigkeit der Stammfunktion. Dabei wurden sie erheblich vom Einsatz des Computers als Rechenhilfe und zur Veranschaulichung gestützt. Sowohl die Möglichkeit, Polynome zu integrieren, zur Probe zu differenzieren und entsprechende Funktionsgraphen zu zeichnen, ermöglichte den Schülerinnen und Schülern, ihre Konzentration auf das Wesentliche zu lenken. Deswegen ist anzunehmen, dass die Schülerinnen und Schüler, die den Computer als Werkzeug zur Verfügung hatten, bessere Aussichten auf Erfolg besitzen als die Schülerinnen und Schüler, die den Computer nicht nutzen konnten. Die Abbildung 11.4 deutet im Vergleich zu Abbildung 11.5 ebenfalls auf einen stärkeren Einfluss des Computereinsatzes als die Teilnahme an KLIP. Die Abbildung 11.7 weist zudem auf einen außergewöhnlichen Einfluss der Leistungskurse hin, der aber hauptsächlich auf den Gymnasial-Leistungskursen basiert (vgl. Abbildung 11.6). Der in den letzten Aufgabenteilen angesprochene Aspekt des Geschlechterverhältnisses als Einflussfaktor auf das Lösungsverhalten wird hier ebenfalls angenommen.

Korrelationen. Kursart **k** (**0,419 (0,01)**), Note **nlh (0,299 (0,01))**, Interesse **i** (**0,243 (0,01))** Schule **s** (-**0,471 (0,01)**), Schulform **sf (0,208 (0,05))** und Computereinsatz **r (0,205 (0,05))** werden auf Grund ihrer signifikanten Korrelationen mit dem Lösungsverhalten bei Aufgabe 4c (vgl. Tabelle 15-35) näher untersucht. In der zweiten Konstellation sind es die Variablen **k** (**0,648 (0,01)**), Note **nlh (0,310 (0,01))** und Interesse **i** (**0,400 (0,01))**.

Erste Konstellation. Der Einfluss der Variable Schulform (**sf**) zeigt sich in einem sehr hohen Maße gruppentrennend, d.h. von den insgesamt 19 korrekten Lösungen wurde keine von einer Schülerin der Gesamtschule erstellt (vgl. Abbildung 11.6). Damit ist keine ML-Schätzung möglich, so dass diese Variable trotz ihres Einflusses ausgeschlossen wird. Die Variable **k** zeigt sich ebenfalls sehr einflussreich mit starken Wechselwirkungen mit den Variablen **nlh** und **i**. Zugleich existieren drei Ausreißer mit sehr hohem Pearson-r, die nicht unberücksichtigt bleiben können. Bei Ausschluss dieser Ausreißer ist in der Gruppe der Grundkurse keine korrekte Lösung mehr enthalten und damit ist wiederum keine ML-Schätzung möglich. Bei Berücksichtigung der Ausreißer und einem Modell mit **k** als einziger abhängiger Variable erhält man eine odd ratio von 12,865 bei einem Wald-Wert von 15,084 (Sig.: 0,000) und einem Mc Fadden von 0,231. Um den wechselwirkungsfreien Einfluss der anderen Variablen untersuchen zu können, wird **k** ebenfalls ausgeschlossen und ihr starker Einfluss zu Kenntnis genommen. Bei den verbleibenden Variablen, die alle in Einzelmodellen, die nur diese als unabhängige Variable enthalten, niedrigere Einflusswerte als **k** besitzen, zeigen sich keine weiteren Wechselwirkungen. Die Variablen **g** und **u** zeigen keinen signifikanten Einfluss, so dass direkt **r** in dieses Modell aufgenommen wird.

Tabelle 11-50. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	26,730	5	0,000
Mc Fadden	0,217		
Korrekte Klassifizierungen	84,9%		

Tabelle 11-51. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Note			8,341	2	0,015	
schwach (nlh)	0,840	0,882	0,908	1	0,341	2,317
durchschn. (nlh)	-1,258	0,546	5,309	1	0,021	0,284
Interesse			4,546	2	0,103	
ungern (i)	-0,896	0,551	2,651	1	0,104	0,408
gern (i)	0,868	0,414	4,387	1	0,036	2,381
Computereinsatz (r)	1,627	0,593	7,522	1	0,006	5,088
Konstante	-4,082	1,065	14,696	1	0,000	0,017

Verknüpfungsfunktion: Logit

Der positive Einfluss der „schwachen" Schülerinnen und Schüler auf den Erfolg bei dieser Aufgabe ist aus oben genannten Gründen kritisch zu hinterfragen. Ansonsten sind die beiden anderen Variablen in den Ausprägungen „durchschnittlich" (Note) und „gern" (Interesse) signifikant einflussreich. Der Einfluss wird auch entsprechend der in Abbildung 11.8 und Abbildung 11.9 dargestellten Reihenfolge ausgeübt.

Besonders hervor hebt sich der Computereinsatz (**r**), der mit einem guten Wald-Wert und einer odd ratio von 5,088 den größten positiven Einfluss auf die Lösungswahrscheinlichkeit nach den Variablen **k** und **sf** ausübt. Somit werden die eingangs formulierte Hypothese unterstützt, dass der Computereinsatz hier in Abgrenzung zur Teilnahme an KLIP außerordentliche Wirkung auf die Gruppentrennung aufweist. Dies gründet sich in erster Linie auf die sehr guten Ergebnisse des LKUC und dem schwachem Abschneiden der Kurse LKUO und GKOO (vgl. Abbildung 11.6). Aufgrund des Einflusses der Note muss jedoch der in Abschnitt 11.1.1 formulierte Vorbehalt hinsichtlich möglicher Leistungsvorteile von Schülern und Schülerinnen in den KLIP-Kursen eingebracht werden. Da jedoch keine Wechselwirkungen zwischen den beiden Variablen **k** und **nlh** vorliegen, kann der Vorbehalt als unbegründet angenommen werden. Die Bewertung des fehlenden Einflusses der Jungen ist vergleichbar mit der Analyse zu Aufgabe 4b.

Zweite Konstellation. Auch in dieser Konstellation ist der Einfluss der Variablen **k** sehr hoch und bis auf einen Ausreißer wiederum gruppentrennend. Aufgrund der Wechselwirkungen wird analog zur ersten Konstellation vorgegangen und es werden die Variablen **u, g, nlh** und **i** betrachtet.

Tabelle 11-52. Informationen zur Modellanpassung (n=80, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	66,966	5	0,000
Mc Fadden	0,256		
Korrekte Klassifizierungen	83,1%		

Das ebenfalls gut angepasste Modell bestätigt die Aussagen der ersten Konstellation, wobei Tabelle 11-53 zeigt, dass der Einfluss der Note etwas zurückgegangen ist und das Interesse im Vergleich dazu etwas gewonnen hat. Die Wirkung der Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) ist mit dem Wegfall des Kurses LKUO und der Identität von **r** und **u** in dieser Konstellation zu erklären. Das bedeutet, dass der starke Einfluss des Computereinsatzes **r** sich auch hier bestätigt.

Tabelle 11-53. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=80, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Note			4,223	2	0,121	
schwach (nlh)	1,346	1,473	0,835	1	0,361	3,841
durchschn. (nlh)	-1,071	0,680	2,479	1	0,115	0,343
Interesse			6,875	2	0,032	
ungern (i)	-2,964	1,183	6,278	1	0,012	0,052
gern (i)	-1,122	0,707	2,516	1	0,113	0,326
Teiln. am UV (u)	1,472	0,678	4,715	1	0,030	4,360
Konstante	-2,088	1,123	3,458	1	0,063	0,124

Verknüpfungsfunktion: Logit

Eine konkrete Ergebnisanalyse der Lösungen zeigt, dass vielen Schülerinnen und Schüler im Kurs GKOO1 der Begriff „Differenzieren" in der Aufgabenstellung nicht bekannt war. Dieser Umstand scheint ebenfalls maßgeblich für das deutliche Ergebnis zu Gunsten der KLIP-Kurse und der Leistungskurse verantwortlich zu sein und relativiert zum Teil die Interpretation des starken Computereinflusses.

Zusammenfassung. Der Stammfunktionsaspekt wurde primär von Schülerinnen und Schülern der Leistungskurse, die mit Einsatz des Computers gearbeitet haben, entwickelt. Dabei ist weder eine Dominanz von den Jungen noch von den Mädchen zu beobachten. Erklärt wird dieser Vorteil vorrangig durch leistungsbedingte Unterschiede und in zweiter Linie durch die Unterstützung des Begriffsbildungsprozesses durch den Computer als Rechenhilfe und zur Veranschaulichung. Diese Unterstützung durch den Computer wirkt somit am Stärksten bei diesem Integralaspekt ein. Die genauen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Aufgaben hinsichtlich der Aspekte wird aber noch Teil einer detaillierten Analyse im Abschnitt 11.3.4 sein. Der Einfluss der Note ist in Relation zu der Kursart und dem Computereinsatz gering, so dass die in Abschnitt 11.1.1 formulierte Annahme der leistungsbedingten Vorteile der Versuchskurse gegenüber den Vergleichskursen zurückgewiesen werden kann.

11.3.3.10 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 4d

Die Lösung dieses Aufgabenteils lässt sich auf zwei zentrale Lösungsschritte reduzieren. Erst musste der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Beschleunigung erkannt werden. Das ist sowohl auf Grundlage des F-Aspektes als auch mit Hilfe des S-Aspektes möglich. Danach musste die Geschwindigkeitsangabe um 10^{30} Uhr als relevante Information erkannt und mit Hilfe des Hauptsatzes konnte eine theoretische Lösung gefunden werden. Vom Anforderungstyp ist die Aufgabe eine Problemlöseaufgabe. Da sie aber kaum relevantes Zahlenmaterial enthält, kann sie nur durch exemplarische Erklärung oder durch Rückgriff auf allgemeine Zusammenhänge gelöst werden. Dies kennzeichnet die Aufgabe zugleich als Verständnisaufgabe, im Gegensatz zur zweiten oder dritten Aufgabe, bei denen das Gewicht mehr auf dem Problemlöseprozess lag.

Forschungsfragen und Hypothesen. Insofern interessieren an dieser Aufgabe nicht die verwendeten Begriffe und Lösungsverfahren, sondern ein Vergleich der Schülerinnen und Schüler, die diese Aufgabe gelöst haben mit denen, die bei den Aufgaben 2 und 3 erfolgreich waren. So ist zu vermuten, dass hinsichtlich des Lösungsverhaltens bei dieser Aufgabe die Teilnahme an KLIP deutlich hervortritt. Da diese Aufgabe ferner eine Nähe zu Fahrtenschreiberaufgabe aufweist, wird diese Vermutung noch gestützt. Basierend auf dieser Nähe soll bei den Schülerinnen und Schülern der KLIP-Kurse analysiert werden, welche

Bezüge zu den Intentionalen Problemen und damit gleichermaßen zu den Kernideen hergestellt wurden. Die Klassifizierung dieser Aufgabe als Verständnisaufgabe wird vermutlich eine andere Geschlechterkonstellation als die in den Aufgaben 2 und 3 beobachtete hervorbringen. Eine intendierte Funktion des Computereinsatzes liegt in der Stärkung des Verständnisses von Zusammenhängen in der Mathematik. Deswegen ist es denkbar, dass der Computereinsatz größere Einwirkungen auf das Lösungsverhalten als die Unterrichtsversuchsteilnahme zeigt.

Korrelationen. Die darüber hinaus auf Grund signifikanter Korrelationen einzubeziehenden Variablen sind (vgl. Tabelle 15-36) **k (0,220(0,05)), u (0,188 (0,05), s (-0,219 (0,05)), r (0,240 (0,01))** für die erste Konstellation und für die Vergleichskurse **k (0,383 (0,01)), nlh (0,232 (0,01)), u (0,298 (0,01)** und **i (0,288 (0,01)).** Es zeigt sich, dass dieselben Variablen in der ersten und in der zweiten Konstellation signifikant sind, nur mit teilweise deutlichen Steigerungen. Es kommen die Note (**nlh**) und das Interesse (**i**) als weitere mögliche Einflussfaktoren hinzu.

Erste Konstellation. Aus der Abbildung 11.6 geht hervor, dass der Leistungskurs LKUC im Vergleich mit den anderen Kursen mit großem Abstand die höchste Lösungshäufigkeit besitzt. Das begründet u.a. die signifikante Korrelation von **s**, da zwei Leistungskurse von derselben Schule kommen und der zweite Leistungskurs dieser Schule das zweitbeste Ergebnis aufweist. Eine Erklärung für die Dominanz des Kurses LKUC wäre die oben beschriebene Nähe zur Fahrtenschreiberaufgabe. In diesem Kurs wurde sich offensichtlich stärker als in den anderen KLIP-Kursen mit der Problematik dieser Aufgabe auseinandergesetzt, so dass Bezüge hergestellt werden konnten und zur erfolgreichen Lösung dieser Aufgabe beitrugen (vgl. Kapitel 10). Angesichts der Dominanz dieses Kurses auch bei den anderen Aufgaben (vgl. Abbildung 11.6) kann man offensichtlich von einer generellen, erfolgreichen Annahme und weiteren Gestaltung der Lernumgebung durch die Schülerinnen und Schüler dieses Kurses sprechen.

Die Variable **s** wird somit mangels Forschungsrelevanz im Weiteren nicht tiefergehend untersucht. Die Variable **sf** weist auf geringen Einfluss der Schulform hin. Das wird besonders an den Wechselwirkungen mit der Kursart (**k**) und der Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) sichtbar (vgl. Tabelle 15.38 und Tabelle 11.55). Unter Einbeziehung von **sf** erhöhen sich die Werte bei **k** und **u** sehr stark, was darauf hindeutet, dass die Schülerinnen und Schüler aus der Gesamtschule diese Aufgabe schlechter gelöst haben als die Schülerinnen und Schüler vom Gymnasium, was schon durch die Abbildung 11.6 deutlich wurde. Aus diesem Grund wird die Variable Schulform (**sf**) dieser Konstellation entnommen:

Tabelle 11-54. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	11,142	3	0,011
Mc Fadden	0,102		
Korrekte Klassifizierungen	75,6%		

Der Beitrag des Gesamtmodells zur Trennung der Variablen ist nicht gut. Jedoch kann von den bislang in die Untersuchung einbezogenen Variablen (d.h. alle außer **r**) auch nur die Variable **sf** diesen Beitrag aussagefähig steigern (vgl. Tabelle 15.37).

Relevante, ungefähr gleich große Einzelbeiträge sind bei den Schülerinnen und Schülern der Leistungskurse und der KLIP-Kurse zu bemerken (vgl. Tabelle 11-55). Besonders hebt sich der schon erwähnte Leistungskurs LKUC heraus. Die KLIP-Grundkurse und der Kontrollleistungskurs weisen vergleichbare Ergebnisse auf (vgl. Abbildung 11.6). Somit lässt sich insgesamt bemerken, dass die Zugehörigkeit zu einem Leistungskurs ohne KLIP-Teilnahme nicht notwendig bessere Ergebnisse bei dieser Aufgabe liefert als die Teilnahme am Unterrichtsversuch. Damit werden die besonderen Fähigkeiten im Lösen problemorientierter Fragestellungen und Verständnisaufgaben bei den Schülerinnen und Schülern des Unterrichtsversuchs hervorgehoben.

Tabelle 11-55. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:)

Ausprägung	Regressionskoeffizient (β)	Standardfehler	Wald	Freiheitsgrade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,184	0,472	6,276	1	0,012	3,266
Mädchen (g)	0,335	0,473	0,501	1	0,479	1,397
Teiln. am UV (u)	1,100	0,552	3,973	1	0,046	3,003
Konstante	-5,320	1,537	11,980	1	0,001	0,005

Verknüpfungsfunktion: Logit

Der Einfluss des Geschlechts ist nicht relevant. Damit bestätigen sich die im ersten Teil dieses Abschnitts aufgestellten Vermutungen. Im Vergleich zu dem Lösungsverhalten zur zweiten und dritten Aufgabe ist der Unterschied zwischen Mädchen und Jungen nicht mehr vorhanden. Das könnte bedeuten, dass Mädchen bei Problemlöseaufgaben, in denen vernetztes Wissen und allgemeine Wissensstrukturen benötigt werden, dieselben Lösungschancen wie Jungen besitzen (vgl. Kapitel 5).

Computereinsatz und Unterrichtsversuch. Der Austausch der beiden Variablen **u** und **r** führt zu einer Steigerung des Mc Fadden auf 0,201, in den aber wesentlich Wechselwirkungen zwischen **k** und **r** einfließen, was durch die schwachen Ergebnisse des Gesamtschul-Leistungskurses und die guten Leistungen des KLIP-Leistungskurses zu erklären ist. Um den Effekt von **r** innerhalb von **u** zu messen, werden die Konstellationen mit **u** und **r** als einzige unabhängige Variable gegenübergestellt (vgl. Tabelle 15.39 & 15.40). Die Werte von **r** sind besser als die von **u**, jedoch kann man nicht von einem deutlichen Unterschied sprechen. Die vorhergesagten Wahrscheinlichkeiten betragen 34,4% (13,8%) bzw. 30% (12,8%) für die Schülerinnen und Schüler die einen (keinen) Computer benutzen konnten bzw. die an KLIP (nicht) teilgenommen haben. Das sind bei einer so kleinen Population keine überzeugenden Ergebnisse. Demzufolge kann an dieser Stelle die These einer relevanten Einwirkung des Computereinsatzes gegenüber der KLIP-Teilnahme nicht bestätigt werden. Eine Erklärung kann in der Orientierungsfunktion der Fahrtenschreiberaufgabe, welche überwiegend ohne Computereinsatz gelöst wurde, für die Schülerinnen und Schüler aus den KLIP-Kursen gesehen werden. Damit waren die Voraussetzungen bei den KLIP-Kursen hinsichtlich des Computereinsatzes ausgeglichener als zuvor angenommen.

Zweite Konstellation. Die Korrelationen in Tabelle 15-36 legen nahe zu den in der ersten Konstellation analysierten Variablen die Variablen **nlh** und **i** hinzuziehen. Die hinzugenommenen Variablen erklären bei signifikanten Wald-Werten nur gering die Gruppentrennung. Aufgrund der Wechselwirkungen mit **k** und der deutlichen Dominanz dieser Variablen werden in dieser Konstellation nur **k** und **u** berücksichtigt. Die Variable **g** zeigt noch weniger Einfluss auf die Gruppentrennung als in der ersten Konstellation und wird deswegen ebenfalls der Konstellation entnommen.

Tabelle 11-56. Informationen zur Modellanpassung (n=80, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	22,829	2	0,000
Mc Fadden	0,243		
Korrekte Klassifizierungen	80%		

Tabelle 11-57. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=80, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	2,288	0,653	12,278	1	0,000	9,856
Teiln. am UV (u)	2,011	0,680	8,749	1	0,003	7,467
Konstante	-7,677	1,807	18,061	1	0,000	0,000

Verknüpfungsfunktion: Logit

Bei guten Modellwerten werden die Ergebnisse aus der ersten Konstellation noch einmal bestätigt. Wie die Abbildung 11.6 zeigt, besteht neben der beachtlichen Dominanz von LKUC, die beide Variablen zu erklären vermag, auch ein gutes Lösungsverhalten bei dem anderen Leistungskurs und dem KLIP-Grundkurs, während der Vergleichsgrundkurs keine korrekte Lösung beibringt, was durch die nachfolgende Tabelle bestätigt wird.

Tabelle 11-58. Vorhergesagte Lösungswahrscheinlichkeiten (n=80, A:)

Kursart (k)	Teiln. am UV (u)	Vorhergesagte Lösungs-wahrscheinlichkeit (in %)	Vorhergesagte Antwortkategorie
LK	Ja	71	Ja
GK	Ja	18	Nein
LK	Nein	26	Nein
GK	Nein	3	Nein

Zusammenfassung. Bei dieser Verständnis- und Problemlöseaufgabe zeigen analog zu der letzten Aufgabe die Jungen kein besseres Lösungsverhalten als die Mädchen. Die Ursachen liegen in der schon beschriebenen Resonanz zwischen prädikativem Denken, das bei Mädchen stärker ausgeprägt ist, und der Verständnisaufgabe. Insofern hat sich deutlich der Verstehensaspekt gegenüber dem Problemlöseaspekt durchgesetzt. Die Einflüsse von Leistungskurs und KLIP-Teilnahme zeigen sich in beiden Konstellationen, wobei dem Computer kein besonderes Gewicht beigemessen werden kann. Es wird auch hier wieder deutlich, dass die Beteiligung an KLIP fast so stark wirkt wie die Zugehörigkeit zu einem nicht an KLIP teilnehmenden Leistungskurs. Dabei kann aber nicht unberücksichtigt bleiben, dass die KLIP-Kurse durch den Bezug zur Fahrtenschreiberaufgabe deutliche Vorteile besaßen, die jedoch wesentlich nur von dem Kurs LKUC genutzt werden konnten, was schon durch die Analyse der Forschungshefte deutlich wurde. Es wird sich in der nächsten Aufgabe zeigen, inwieweit sich diese Relationen bestätigen, wenn der Bezug zu einer Aufgabe des Unterrichtsversuchs ausbleibt. Im Vergleich zu den Aufgaben 2 und 3 zeigen sich im Wesentlichen nur die beschriebenen Unterschiede bei den Geschlechtergruppen. Eine tiefergehende Analyse wird im Abschnitt 11.3.4 vorgenommen.

11.3.3.11 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten der Aufgabe 4e

Ähnlich wie zuvor bei Aufgabenteil 4d sollte diese Aufgabe Verständnis für Aspekte der Integralrechnung abfragen, wobei es auch hier nicht um die konkrete Analyse der jeweiligen Aspekte ging, sondern vielmehr ein Vergleich mit den Problemlöseaufgaben 2 und 3 angestrebt wurde. Anders als im letzten Aufgabenteil bestand hier keine Bindung zu einer zuvor im Unterricht bearbeiteten Aufgabe, so dass hier für alle Schülerinnen und Schüler dieselben Voraussetzungen bestanden. Die Aufgabenstellung wurde sehr allgemein gehalten, so dass die Schülerinnen und Schüler gefordert waren, ihren Lösungsvorschlag ausführlich zu erläutern. Je nach Annahme der Existenz eines Funktionsterms konnte der S-Aspekt oder der F-Aspekt und der A-Aspekt, aber auch der M-Aspekt angewendet werden.

Forschungsfragen und Hypothesen. Die an das Lösungsverhalten gestellten Erwartungen sind mit denen der letzten Aufgabe vergleichbar. Ein Unterschied besteht lediglich darin, dass aufgrund des fehlenden Bezugs zu einer bekannten Aufgabe die Dominanz der KLIP-Kurse deutlich geringer ausfallen könnte.

Korrelationen. Kursart **k** (**0,224 (0,05)**), Interesse **i** (**0,256 (0,01)**) und Schule **s** (**0,182 (0,05)**) werden auf Grund ihrer signifikanten Korrelationen mit dem Lösungsverhalten in der ersten Konstellation (vgl. Tabelle 15-41) näher untersucht. In der zweiten Konstellation sind dieselben Variablen signifikant, nur jeweils höher korreliert: **k** (**0,440 (0,01)**) und **i** (**0,412 (0,01)**).

Erste Konstellation. Geschlecht (**g**) und Unterrichtsversuch (**u**) zeigen keinen signifikanten Einfluss. Lediglich ein leichter Einfluss von **u** ist zu bemerken. Die Variable **sf** zeigt im Einzelmodell keinen Einfluss auf das Lösungsverhalten, zusammen mit der Kursart ist jedoch signifikantes Verhalten zu beobachten. Das liegt im Wesentlichen daran, dass die beiden gymnasialen Leistungskurse die höchsten Lösungshäufigkeiten aufweisen (vgl. Abbildung 11.6). Hinsichtlich der Analyse der anderen Variablen wird **sf** ausgeschlossen. Die Variablen Interesse (**i**) und Kursart (**k**) zeigen ebenfalls Wechselwirkungen, die im Verhältnis zu den Einzeleinflüssen das Bild stark verzerren. Da diese Variablen nicht von zentralem Forschungsinteresses sind, wird auf eine weitere Analyse verzichtet und ein geringer Einfluss der Variable **i** festgehalten (vgl. Tabellen 15.42 bis 15.45).

Computereinsatz und Unterrichtsversuch. Die Variable **u** zeigt nur geringen nicht signifikanten Einfluss. Dies lässt sich mit leichteren Verbesserungen hinsichtlicht der odd ratio und Signifikanz auch für die Variable **r** bestätigen.

Zweite Konstellation. Die Untersuchung der ersten Konstellation bestätigt sich auch für die zweite Konstellation. Aus den signifikanten Korrelationen von **k** und **i** konnte ein besser erklärendes Gesamt-Modell erwartet werden. Das hat sich auch bestätigt. Der Einfluss hat sich gemäß den Korrelationen zu Gunsten der Kursart verschoben.

Zusammenfassung. Neben den erwarteten Vorteilen, die sich aus der affektiven Dimension und der Zugehörigkeit zu einem Leistungskurs ergeben, lässt sich für diese Aufgabe festhalten, dass die Leistungen der Mädchen den Leistungen der Jungen bei Verständnisaufgaben, die weniger das funktionale, sondern mehr das prädikative Wissen der Jungen und Mädchen anspricht, gleichkommen. Die bei allen Verständnisaufgaben zu beobachtende Tendenz der Nivellierung der Jungendominanz setzt sich somit auch hier fort.

Der vermutete Vorteil von Schülerinnen und Schülern aus KLIP oder Schülerinnen und Schülern, die mit dem Computer gearbeitet haben, ist hier nicht deutlich zu sehen. Das kann daran liegen, dass der Kontroll-Leistungskurs in dieser Aufgabe überdurchschnittliche gute Ergebnisse zeigt. Eine bessere Begründung für diesen Umstand lässt sich auf Grundlage der vorliegenden Informationen nicht geben. Das Verhältnis zwischen den Grundkursen ist ähnlich wie in den anderen Aufgaben. Daraus ließe sich auf einen Aufgabentyp schließen, dessen Lösungsmöglichkeiten wesentlich von der Leistung und der affektiven Dimension abhängen.

11.3.3.12 Einflussgrößen auf das Lösungsverhalten bei Aufgabe 5

In diesem Aufgabenteil mussten die Schülerinnen und Schüler zu einem gegebenen Funktionsgraphen die Stammfunktion zeichnerisch bestimmen. Dazu mussten sie entweder den F-Aspekt oder den S-Aspekt beherrschen. Je nach Begründung ist die Bevorzugung einer der beiden Aspekte erkennbar. Diese Aufgabe verlangte keine Kalkülfähigkeiten. Je nach Vorbedingungen durch den Unterricht ließ sie sich schematisch oder durch Problemlösestrategien bearbeiten. Die zur Lösung dieser Aufgabe zu verwendenden Strategien waren jedoch nur eingeschränkt dem Problemlösen zuzurechnen, da das schematische Element überwiegt. Ähnlich wie in Aufgabe 3 wurde hier die ikonische Repräsentationsebene angesprochen. Es wird sich zeigen, ob dies Hindernisse aufwarf oder eher eine Unterstützung für die Schülerinnen und Schüler bedeutete.

Forschungsfragen und Hypothesen. Innerhalb von KLIP wurde diese Art der Aufgabe nicht explizit geübt, jedoch ist es denkbar, dass einige Schülerinnen und Schüler die Aufgabe zum Geschlechterwachstum mit Hilfe einer vergleichbaren Strategie gelöst haben. In vielen Schulbüchern wird diese Art von Aufgabe immer wieder als Übungsaufgabe gestellt, so dass anzunehmen ist, dass sich die Schülerinnen und Schüler aus den Vergleichskursen mit dem sogenannten graphischen Integrieren auseinandergesetzt haben. Aus diesen Gründen lassen sich für keine der beiden Gruppen bessere Voraussetzungen annehmen. Bezieht man den Computereinsatz in die Überlegungen ein, so ist zu vermuten, dass dieser bei den Schülerinnen und Schülern, die den Computer zur Verfügung hatten, positive Auswirkungen zeigt, da durch die Möglichkeit zur Visualisierung der Umgang mit dieser Darstellungsform in einem größeren Umfange geübt wurde. So stellt sich die Frage, ob der Einsatz des Computers relevanten Einfluss auf das Lösungsverhalten dieser Aufgabe hat und ob dieser Einfluss sich deutlich von einem möglichen Einfluss der KLIP-Teilnahme separieren lässt. Da diese Aufgabe deutlich auf Verständnis abzielt, ist mit einem ähnlichem Geschlechterverhältnis wie bei den anderen Verständnisaufgaben zu rechnen.

Korrelationen. In der ersten Konstellation sind lediglich die Variablen Schule **sf** (**0,259 (0,01)**) und Computereinsatz **r** (**0,311 (0,01)**) signifikant (vgl. Tabelle 15-46). In der zweiten Konstellation sind die Kursart **k** (**0,356 (0,01)**) und die Teilnahme am Unterrichtsversuch **u** (**0,256 (0,05)**) signifikante Variablen. Da aus der Gesamtschule wiederum keine Schülerin die Aufgabe so lösen konnte, dass sie als inhaltlich verstanden gelten kann, besteht eine vollkommene Gruppentrennung, die keine ML-Schätzung erlaubt. Aufgrund der Forschungsfragen werden diese Variablen noch um **u, g** und **k** in der ersten und **g** in der zweiten Konstellation ergänzt.

Erste Konstellation. Die Untersuchung der Variablen **u, g** und **k** zeigt keine signifikanten Einflüsse auf die Gruppentrennung. Dafür sind ebenfalls keine Wechselwirkungen verantwortlich. Es bleibt das reduzierte Modell mit der unabhängigen Variable **r** zu untersuchen.

Tabelle 11-59. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	12,018	1	0,001
Mc Fadden	0,102		
Korrekte Klassifizierungen	73,9%		

Tabelle 11-60. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Computereinsatz (r)	1,553	0,481	10,434	1	0,001	4,726
Konstante	-3,539	0,848	17,430	1	0,000	0,029

Verknüpfungsfunktion: Logit

Der Beitrag des Gesamtmodells zur Trennung der Gruppen ist schwach. Das ist bei Einbeziehung einer einzigen Variablen jedoch auch nicht anders zu erwarten. Der Wald-Wert und die odd ratio sind sehr gut, so dass man von einem relevantem Einfluss dieser Variablen auf die Gruppentrennung sprechen kann. Damit bestätigt sich die anfangs aufgestellte Vermutung hinsichtlich der Förderung der Anschauung durch den Computereinsatz. Erstaunlich ist die Tatsache, dass die Teilnahme am Unterrichtsversuch sich nicht gruppentrennend auswirkt, obwohl die Abbildung 11.5 darauf hindeutet. Eine Erklärung liefert wiederum der Kurs LKUO, dessen Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe nicht lösen konnten. Demzufolge ist es interessant, ob die Variable **r** in der zweiten Konstellation in Form von **u** relevant auf die Gruppentrennung einwirkt.

Zweite Konstellation. Die nachfolgende Tabelle bestätigt diese Annahme.

Tabelle 11-61. Informationen zur Modellanpassung (n=80, A:)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	17,813	2	0,000
McFadden	0,197		
Korrekte Klassifizierungen	73,8%		

Tabelle 11-62. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=80, A:)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,922	0,585	10,790	1	0,001	6,837
Teiln. am UV. (u)	1,558	0,600	6,747	1	0,009	4,751
Konstante	-6,129	1,543	15,767	1	0,000	0,002

Verknüpfungsfunktion: Logit

Für diese Population sind die Gütemaße für das Gesamtmodell zufriedenstellend. Wechselwirkungen zwischen **k** und **u** führen zu einer leichten Abschwächung der Beiträge in den Einzelmodellen. Damit zeigt sich, was in den Abbildungen 11.4 & 11.5 schon angedeutet ist. Auch ohne die Berücksichtigung des Gesamtschulkurses kann von einer deutlichen Überlegenheit der Kategorie Computereinsatz gesprochen werden, die in Anlehnung an die Überlegungen während der Analyse der ersten Konstellation deutlich höher zu bewerten ist als die Teilnahme am Unterrichtsversuch. Zieht man weitere Variablen hinzu, lassen sich nur Auswirkungen seitens des Geschlechts erkennen und zwar zu Gunsten der Ausprägung „Mädchen" (vgl. Tabelle 15-47 bis 15-52). Die Mädchen haben im Einzelmodell Einfluss auf das Lösungsverhalten. Ihr Einfluss wächst bei Berücksichtigung des Computereinsatzes. Das bedeutet, dass Mädchen den Einsatz des Computers bei dieser Art Aufgabe besser als Jungen zu ihrem Vorteil nutzen können. Im Zusammenhang mit der Variablen Kursart sinkt der Einfluss der Mädchen jedoch (vgl. Tabelle 15-52). Damit zeigt sich, dass die Mädchen im Grundkurs mehr vom Einsatz des Computers profitiert haben als die Mädchen im Leistungskurs.

Zusammenfassung. Das deutlichste Ergebnis dieser Analyse, ist die Tatsache, dass der Computereinsatz das Lösungsverhalten bei Aufgaben, in denen Verständnis auf ikonische Repräsentationsebene gefragt sind, positiv unterstützt. Im direkten Vergleich mit den Kontrollkursen sind es sogar die Mädchen, die davon besonders profitieren. So wird deutlich, dass der Computereinsatz eine Mädchenförderung bedeutet, die in den Grundkursen ein wenig stärker als in den Leistungskursen ausgeprägt ist. Das mag damit zusammenhängen, dass das positive Interesse am Fach Mathematik mit der Geschlechterausprägung „Jungen" im Leistungskurs signifikant korreliert.

11.3.4 Zusammenführung der Einzelanalysen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Einzelanalysen der Aufgaben zusammengeführt und übergreifend diskutiert. Dabei werden die in den vorangegangenen Abschnitten aufgeworfenen Fragen aufgegriffen und einer Antwort zugeführt.

Die Struktur dieses Abschnittes orientiert sich an den Einflussvariablen und an möglichen Klassifizierungen der Aufgaben. Diese Klassifizierungen, wie zum Beispiel der Unterteilung in Problemlöse-, Kalkül- und Verständnisaufgaben sind zum einen durch die Testkonzeption (vgl. Abschnitt 11.1.2) vorgegeben und zum anderen sind sie eine Folgerung aus der Analyse der letzten Abschnitte. So lässt sich auf Grundlage der Testergebnisse die Konzeption rechtfertigen oder verwerfen und es lassen sich weitere Zusammenhänge explorieren. In der nachfolgenden Tabelle sind in den letzten beiden Zeilen die Vorgaben durch die Konzeption noch einmal aufgeführt und in den Zeilen darüber sind die Ergebnisse aus den Einzelanalysen nach Variablen zusammengefasst.

Tabelle 11-63. Einflüsse der Variablen auf die einzelnen Aufgaben

Variable/Aufgabe	1	2a	2b	2c	3b	3c	4a	4b	4c	4d	4e	5
Kursart (**k**)		+++	++			++	++		+++	+++	+	
Kursart (**k**) (VK)	++	+++	++			++	+++	++	+++	+++	++	+++
Geschlecht (**g**)	+	- -	-	- -	- - -	- -	- -					
Geschlecht (**g**) (VK)	+	- -		- -	- - -	- -	- - -					+
Schule (**s**)												
Schulform (**sf**)	+++		+++	++	++	+++	++		+++	+++		+++
Teiln. am Unterrichtsv. (**u**)		- - -	++	+	+++	+				++		
Teiln. am Unterrichtsv. (**u**) (VK)		- - -	+++	+	+++	+++	++	+	+++	+++		++
Note letztes Zeugnis (**nlh**)	++								++			
Note letztes Zeugnis (**nlh**) (VK)	++								+			
Interesse (**i**)	++						++		+		+	
Interesse (**i**) (VK)	+				++	++			++		++	
Computereinsatz (**r**)	++	--	+++	++	+++	++	++		+++			+++
Aufgabentyp	K	K	KP	P	P	P	V	V	V	VP	VP	V
Ikonische Repräsentation					x	x						x

P: Problemlöseaufgabe +/-: Einfluss (nicht sig.)
K: Kalkülaufgabe ++/--: Einfluss (sig.)
V: Verständnisaufgabe +++/--- großer Einfluss (sig.)

Ein + bzw. - bedeutet einen nicht signifikanten Einfluss der Variable auf die jeweilige Aufgabe in aufsteigender bzw. in absteigender Richtung der numerisch kodierten Kategorien (vgl. Tabelle 11-2). Ein - bei Geschlecht heißt zum Beispiel, dass die Kategorie „Junge“ (Kodierung: 1) nicht signifikanten Einfluss auf die Gruppentrennung besitzt. Ein ++ bzw. ein -- zeichnet die Variablen aus, die signifikant Einfluss auf die Gruppentrennung nehmen und ein +++ bzw. --- beschreibt sehr starken signifikanten Einfluss. Für die letzte Zuordnung gibt es keinen Schwellenwert, sondern die Einteilung wird auf Grundlage eines Vergleiches der Ergebnisse der jeweiligen Aufgabe vorgenommen, da es bei der logistischen Regression nicht sinnvoll ist, die Einflusswerte aufgabenübergreifend zu vergleichen.

Zur Auswertung der aufgabenübergreifenden Zusammenhänge wird an einigen Stellen die kategoriale Hauptkomponentenanalyse verwendet (vgl. Abschnitt 11.2.2). Diese Methode ist sehr gut geeignet, da sie sowohl eine Reduktion der Aufgabenvariablen auf wenige Faktoren ermöglicht als auch in einigen Fällen eine Darstellung der Homogenität und Heterogenität der einzelnen Kategorien im zwei-dimensionalen euklidischen Raum erlaubt.

Die Fragestellungen, die in diesem Abschnitt primär untersucht werden, sind:

- Findet die in der Testkonzeption vorgenommene Klassifizierung in Problemlöse-, Kalkül- und Verständnisaufgaben im Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler wieder?
- Unterscheidet sich die Aufgabenbearbeitung hinsichtlich der Integralaspekte?
- Unterscheidet sich die Aufgabenbearbeitung hinsichtlich der Einflussfaktoren Geschlecht, Unterrichtsteilnahme und Computereinsatz?
- Lassen sich Zusammenhänge zwischen den Aufgaben erkennen, die die ikonische Repräsentationsebene ansprechen?

Diese Fragestellungen betreffen einzelne Aufgaben in mehrfacher Hinsicht, so dass zu vermuten ist, dass nicht alle Beziehungen gleichermaßen durch die Homogenitätsanalyse exploriert werden können. Aus diesem Grund wird zu Beginn eine Homogenitätsanalyse für alle Aufgaben gemeinsam durchgeführt. Dabei können besondere Eigenschaften der Aufgaben oder der Bearbeitungen nicht berücksichtigt werden, man erhält jedoch einen Eindruck über gewichtige und weniger gewichtige Zusammenhänge zwischen den Aufgaben. Das Ergebnis dieser Analyse wird nicht isoliert, sondern im Rahmen der nachfolgenden Untersuchungen interpretiert.

Im Anschluss an die Gesamtuntersuchung werden die Fragen, geordnet nach Aufgabentypen, Integralaspekten und Einflussvariablen diskutiert.

11.3.4.1 Homogenitätsanalyse über alle Aufgaben

Hinsichtlich der Anzahl der Dimensionen, auf die die Variablen mit Hilfe von HOMALS reduziert werden können, sind zwei Gesichtspunkte von Bedeutung. Erstens beschränkt die graphische Darstellung die Dimensionszahl auf maximal drei und zweitens lässt sich analog zum Kaiser-Kriterium der linearen Faktorenanalyse für die Homogenitätsanalyse das folgende Kriterium definieren: Die Eigenwerte multipliziert mit der Anzahl der Variablen m sollten größer als 1 sein (vgl. Abschnitt 11.2.2). Falls bei einer zweidimensionalen Darstellung weitere Dimensionen mit höheren Eigenwerten als $1/m$ existieren sollten, werden diese mit in die Analyse einbezogen. Ansonsten ist die Darstellung im $\mathbb{R}^2$ hinreichend. Bei der Analyse von 12 Aufgaben[162] ist der Schwellenwert für die zu berücksichtigenden Eigenwerte somit $1/m = 0{,}09$.

Wegen des verhältnismäßig großen Sprungs von Dimension 4 auf Dimension 5 wird auch die vierte Dimension einbezogen. Das ist unproblematisch, da dies keinen Einfluss auf die

[162] Aufgabe 3a ist nicht berücksichtigt (vgl. dazu 11.3.3).

Werte in den anderen Dimensionen nimmt. Da an dieser Stelle die Lage im $\mathbb{R}^p$ der Kategorien interessiert, wird auf eine Darstellung der Diskriminanzmaße verzichtet.

Tabelle 11-64. Eigenwerte (n=119; A1-5)[163]

Eigenwerte	Dimension
0,340	1
0,119	2
0,093	3
0,082	4
0,058	5

Die Kategorienquantifikationen sind insoweit von Interesse, da man aus ihnen die Lage der Kategorien zueinander erkennen kann. Aus einer vierdimensionalen Darstellung ist dies nur schwer möglich. Zur Aufdeckung der Klassen, die nahe beieinanderliegende Kategorien beinhalten, wird eine hierarchische Clusteranalyse verwendet. Die benutzte Methode ist der Ward-Algorithmus mit der Euklidischen Distanz[164] als Abstandsmaß. Nachfolgend ist das Dendogramm der Clusteranalyse aufgeführt. Die Quantifikationen der Kategorien sind im Anhang dokumentiert (vgl. Tabelle 15-53).

Die Clusteranalyse unterteilt die Aufgaben im Wesentlichen in „inhaltlich verstanden" und „inhaltlich nicht verstanden". Lediglich die Aufgabe J2a[165] ist „falsch" zugeordnet.

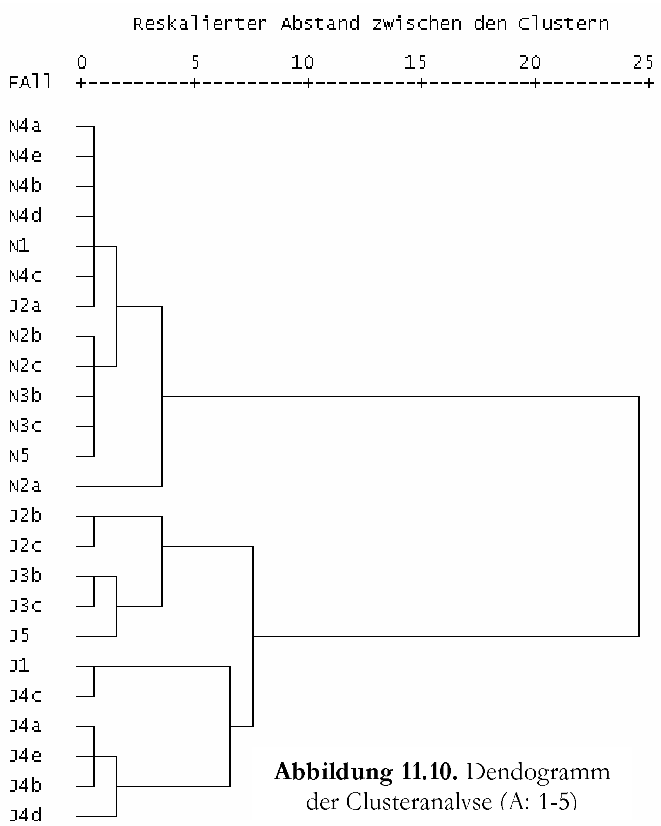


Abbildung 11.10. Dendogramm der Clusteranalyse (A: 1-5)

Konzentriert man sich zuerst auf die richtigen Lösungen, so lassen sich folgende Cluster erkennen: 4a, b, e und 4d die zusammen mit 1 und 4c einen neuen Cluster bilden; 2b, c und 3b, c und 5 sind drei Cluster, die zusammen einen neuen Cluster ergeben. Bei den nicht richtigen Antworten ist die Struktur sehr ähnlich. Nur sind die Cluster näher beisammen. So sind Aufgabe 4, 1 und J2a zusammen in einem Cluster, ebenso wie 2b, c, 3, 5. Die Aufgabe 2a bildet auf dieser Seite einen eigenen Cluster. Somit bilden, mit Ausnahme von 2, die Teile einer Aufgabe zusammen einen Cluster, wobei die Aufgabe 1 sich an 4c und damit an die Aufgabe 4 anschließt und Aufgabe 5 sich nahe bei 3b,c befindet.

Nimmt man eine Unterteilung in zwei Cluster vor, so lässt sich der eine Cluster als J-Cluster, das sind alle richtigen Lösungen der Aufgaben, und der andere als N-Cluster, das sind die Aufgaben, die nicht korrekt gelöst wurden. Lediglich die Aufgabe J2a wurde dem N-Cluster zugeordnet. Das ist mit der Zuordnung zu Inhalten aus der Sekundarstufe I und der hohen Lösungshäufigkeit dieser Aufgabe zu begründen. Ansonsten

[163] A1-5 bezeichnet die untersuchten Aufgaben.
[164] Die Wahl dieses Maßes folgt aus dem Verfahren der Homogenitätsanalyse.
[165] J2a bedeutet z.B. Die Aufgabe 2a wurde inhaltlich verstanden. N bedeutet entsprechend „inhaltlich nicht verstanden".

deutet diese Aufteilung darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler sich in die Gruppen aufteilen lassen, die dazu in der Lage waren, den gesamten Test zu bearbeiten und die Schülerinnen, die dies nicht waren. Alle weiteren tiefergehenden Analysen werden in den nachfolgenden Abschnitten durchgeführt.

11.3.4.2 Problemlöse- und Kalkülaufgaben

Die Testkonzeption im Abschnitt 11.1.2 sah eine Einteilung der Aufgaben in Kalkül-, Problemlöse- und Verständnisaufgaben vor. Lässt man an dieser Stelle einmal die Verständnisaufgaben unberücksichtigt und damit auch mögliche Überschneidungen mit den anderen beiden Kategorien, sollten die Aufgaben 1 und 2a die Kalkülaufgaben und die Aufgaben 2b,c und 3b,c die Problemlöseaufgaben repräsentieren. Dabei enthält der Aufgabenteil 2b Kalkülanteile, die dem Problemlöseaspekt jedoch untergeordnet sind. Aufgabe 1 und 2a unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Spezifität zum Bereich Integralrechnung. Während Aufgabe 1 eine typische Kalkülaufgabe aus der Integralrechnung ist, handelt es sich bei Aufgabe 2a um eine Kalkülaufgabe aus der Sekundarstufe I.

Mit Hilfe der kategorialen Hauptkomponentenanalyse, die die Kategorien der einzelnen Aufgaben derart im $\mathbb{R}^2$ darstellen kann, dass die Kategorien, bei denen sich ein ähnliches Lösungsverhalten zeigt, nahe beieinander dargestellt und heterogene Strukturen entsprechend diskriminiert werden.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Eigenwerte und Diskrimanzmaße angegeben. Die Abbildung zeigt die entsprechende zweidimensionale Darstellung der Maße. Die Aufgabe 2c wird nicht in die Untersuchung einbezogen, da sie Bezug zu den anderen beiden Aufgabenteilen nimmt und so mögliche Abhängigkeiten das Ergebnis verzerren können.

Tabelle 11-65. Diskriminanzmaße und Eigenwerte (n=119; A1-3)

	Dimension 1	Dimension 2
Eigenwerte	0,477	0,180
Diskriminanzmaße		
Aufgabe 1	0,21	0,41
Aufgabe 2a	0,22	0,47
Aufgabe 2b	0,59	0,01
Aufgabe 3b	0,66	0,00
Aufgabe 3c	0,71	0,01

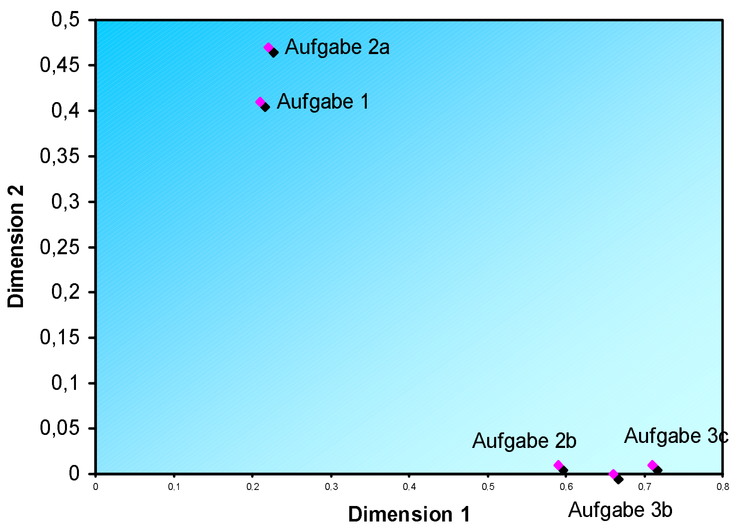


Abbildung 11.11. Diskriminanzmaße (n=119; A1-3)

Die erste Dimension hat aufgrund ihres höheren Eigenwert eine bessere Trennfähigkeit zwischen den Kategorien als die zweite Dimension, die mit 0,9 nur knapp den Wert 1 unterschreitet. Die Abbildung zeigt eine deutliche Trennung der Aufgaben auf die beiden Dimensionen. Die Aufgaben 2b, 3a, b laden sehr hoch und fast ausschließlich auf der ersten Dimension, wobei 2b das kleinste Diskriminanzmaß besitzt. Interpretiert man diese Dimension als Problemlösefähigkeit bei den Schülerinnen und Schülern, zeigt die Staffelung in der ersten Dimension den Grad an Problemlöseelementen in der Aufgabe. Somit deckt sich das Ergebnis mit der Testkonzeption. Die Aufgaben 1 und 2a laden beide auf der zweiten Dimension und mit geringem Anteil auch auf der ersten Dimension. Die zweite Dimension scheint somit die Kalkülfähigkeiten bei den Schülerinnen und Schülern zu trennen. Damit wäre die Einteilung der Aufgaben in Problemlösefähigkeiten im Nachhinein bestätigt und gerechtfertigt.

Die Analyseergebnisse der letzten Abschnitte zeigen in der Variable Geschlecht (**g**) eine Trennung der Aufgaben 1 und 2a-3c (vgl. Tabelle 11.63). Die Mädchen waren besser als die Jungen in der Lage die Aufgabe 1 zu lösen, während die Jungen in allen anderen Aufgaben zum Teil ein deutliches Übergewicht zeigten. Auf Basis des Testes lässt sich somit den Jungen ausgebildetere Problemlösefähigkeiten zuschreiben. Diese sind eng mit funktionalen Wissensstrukturen verknüpft, da die zur Lösung dieser Aufgaben notwendigen Fähigkeiten im Erkennen und Anwenden von Prozessen liegen (vgl. SCHWANK 1996, S. 179).

Wie der Tabelle 11.63 zu entnehmen ist, zeigt die Variable Teilnahme am Unterrichtsversuch (**u**) bei der ersten Aufgabe keine Auswirkungen auf die Lösungsfähigkeiten bei den Schülerinnen und Schülern und bei Aufgabe 2a sind Auswirkungen zu Gunsten der Vergleichskurse erkennbar. Bei den Problemlöseaufgaben hingegen ist ein deutlicher Einfluss der Schülerinnen und Schüler des Unterrichtsversuchs zu beobachten. Bei Beachtung der besonderen Stellung der zweiten Aufgabe innerhalb der Integralrechnung lässt sich folglich festhalten, dass die Schülerinnen und Schüler, die an KLIP teilgenommen haben deutlich mehr Problemlösefähigkeiten besitzen und bei den Kalkülaufgaben nur unbedeutende Nachteile gegenüber den Vergleichskursen besitzen.

Der Einsatz des Computers nimmt in dieser Klassifizierung eine andere Rolle als der Unterrichtsversuch ein, da er z.B. bei Aufgabe 1 starken Einfluss auf die Gruppentrennung nimmt. Insofern fördert der Computer als Teil von KLIP die Problemlösefähigkeiten und wirkt unterstützend bei Aufgabe 1 in Hinblick auf die Berücksichtigung der Nullstellen im Lösungsprozess (vgl. Abschnitt 11.3.3.1).

11.3.4.3 Verständnisaufgaben

Als Verständnisaufgaben wurden in der Testkonzeption die Aufgaben 4a-e und 5 eingestuft, wobei die Aufgaben 4a-c als sogenannte reine Verständnisaufgaben konzipiert wurden, d.h. sie haben keinen Bezug zu konkreten Problemen. Die Aufgabenteile 4d und 4e nehmen Bezug zu Problemen, wobei die Aufgabe 4d stark an die Fahrtenschreiberaufgabe angelehnt ist. Die fünfte Aufgabe spricht die ikonische Darstellungsebene an und weist ebenfalls keinen Problembezug auf.

Die Testanalyse zeigt, dass zwischen den Aufgaben 4a und 2 besondere Beziehungen existieren könnten, die im Wesentlichen darin bestehen, dass die Aufgabe 2 den Mittelwertaspekt der Integralrechnung zur Problemlösung benötigt, welcher in Aufgabe 4a abgefragt wird. Ein derartiger Bezug würde die Aufgabe 4a für die Analyse als Verständnisaufgabe wertlos machen. Deswegen wird im Folgenden eine Analyse zur Homogenität zwischen den Aufgabe 4a und 2 durchgeführt. Da in diesem Fall die Quantifikationen der Kategorien interessieren, werden diese im Anschluss an die Diskriminanzmaße dargestellt.

Tabelle 11-66. Diskriminanzmaße und Eigenwerte (n=119; A2a-c;4a)

	Dimension 1	Dimension 2
Eigenwerte	0,530	0,196
Diskriminanzmaße		
Aufgabe 2a	0,35	0,64
Aufgabe 2b	0,67	0,03
Aufgabe 2c	0,62	0,02
Aufgabe 4a	0,48	0,09

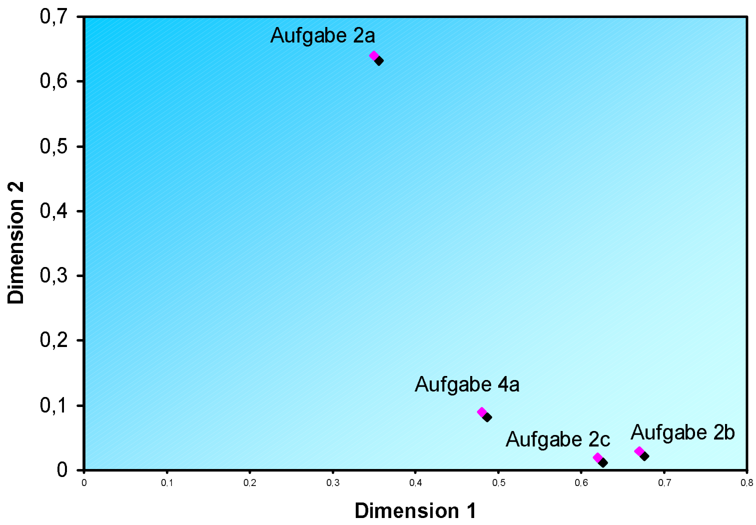
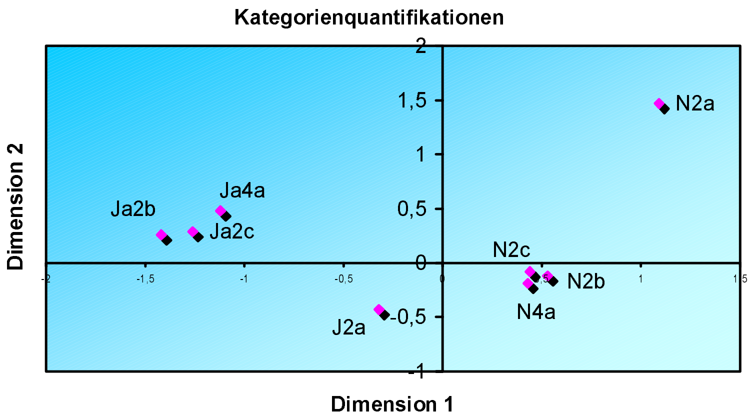


Abbildung 11.12. Diskriminanzmaße (n=119; A4a-e)

Der Eigenwert der ersten Dimension weist auf eine gute Trennung der Kategorien bei den Lösungen dieser Aufgabe hinsichtlich dieser Dimension hin. Die zweite Dimension trennt nicht ganz so gut zwischen den Kategorien. Aufgrund der Lage lässt sich die erste Dimension als Schwierigkeitsgrad und die zweite Dimension als Zuordnung zu bestimmten Mittelwertaspekten interpretieren. Das würde die Positionierungen der Aufgabe 2a und der anderen Aufgaben in der ersten Dimension erklären. Während bei Aufgabe 2a das arithmetische Mittel bestimmt werden muss, benötigt man bei den anderen Aufgaben die Kenntnis des M-Aspektes der Integralrechnung.

Abbildung 11.13. Kategorienquantifikationen[166] (n=119; A2a-c,4a)



Mit Blick auf Abbildung 11.12 werden die unterschiedlichen Fähigkeiten, die zur Lösung der Aufgaben notwendig sind, offensichtlich. Zugleich wird der vermutete Zusammenhang zwischen den Aufgaben 4a und 2 b, c deutlich. Da nämlich die Kategorien-Quantifizierungen gerade dem mittleren Score der Objekte entsprechen, deuten die Positionen der drei Aufgabenteile auf viele gemeinsame Fälle hin, so dass unter Berücksichtigung der Einzelanalysen von 2b, c und 4a die Lösung zur Aufgabe 4a als abhängig von der Lösung zur zweiten Aufgabe gesehen werden kann und deswegen in der nachfolgenden Untersuchung

[166] Ja: inhaltlich verstanden; N: inhaltlich nicht verstanden.

zu den Verständnisaufgaben nicht berücksichtigt wird (vgl. Abschnitte 11.3.3.3, 11.3.3.4 & 11.3.3.7).

Damit werden als sogenannte Verständnisaufgaben nur die Aufgaben 4b-e und 5 in die Homogenitätsanalyse einbezogen.

Tabelle 11-67. Diskriminanzmaße und Eigenwerte (n=119; A4b-e,5)

	Dimension 1	2
Eigenwerte	0,412	0,179
Diskriminanzmaße		
Aufgabe 4b	0,389	0,209
Aufgabe 4c	0,433	0,016
Aufgabe 4d	0,517	0,000
Aufgabe 4e	0,434	0,098
Aufgabe 5	0,290	0,571

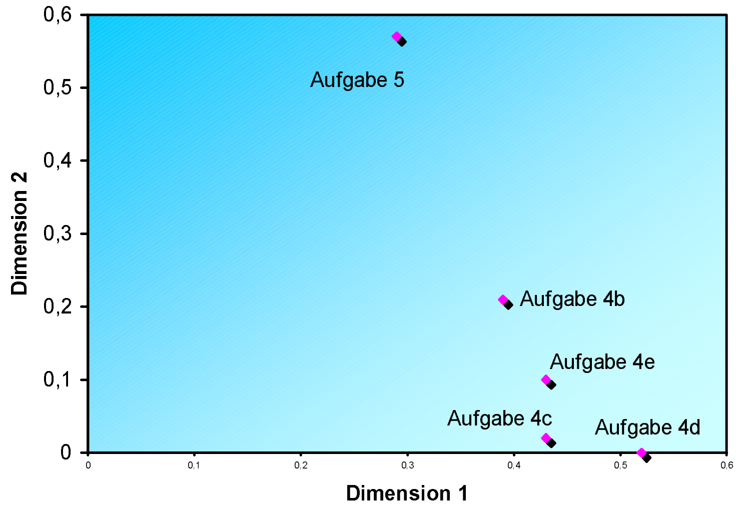


Abbildung 11.14. Diskriminanzmaße (n=119; A4b-e,5)

Die erste Dimension hat wiederum einen sehr guten Eigenwert, wobei die Aufgabe 4d am Höchsten auf dieser Dimension lädt. Eine sinnvolle Interpretation dieser Dimension ist jedoch nicht möglich. Die Kategorienquantifikationen zeigen die Gründe für die Schwierigkeiten.

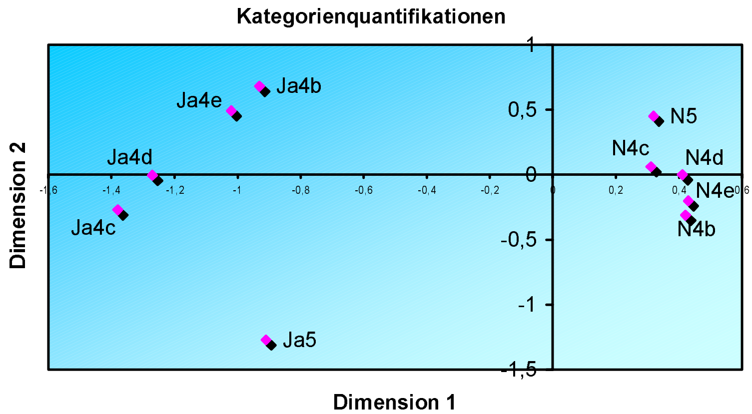


Abbildung 11.15. Kategorienquantifikationen (n=119; A2a-c,4a)

Während viele Fälle ein ähnliches Antwortverhalten hinsichtlich der Kategorie 1 („inhaltlich nicht verstanden") bei den Aufgaben 4b-e zeigen, ist das Antwortverhalten in der zweiten Kategorie sehr gestreut. Es zeigen sich auch keine Ausreißer in der Objektscore-Matrix, die dieses Phänomen erklären könnten. Lediglich die besondere Rolle der Aufgabe 5 wird deutlich, die vorrangig von der zweiten Dimension erklärt wird. Eine Interpretation dieser Dimension kann im für diese Aufgabe benötigten Repräsentationsniveau liegen. Der Zugang zur Aufgabe 5 stützt sich wesentlich auf ein geometrisches Verständnis. Dies lässt sich ebenfalls für Aufgabe 4b sagen, da der dort abgefragte F-Aspekt geometrischer Natur ist. Die Aufgabe 4e ist sowohl unter geometrischen Gesichtspunkten als auch unter Zuhilfenahme des S-Aspektes gelöst worden. Bei den anderen beiden Aufgaben dominierte in den Schüler- und Schülerinnenlösungen deutlich der S-Aspekt, was die Diskriminanzmaße der Variablen erklärt.

Eine tiefergehende Deutung ist auch unter Zuhilfenahme reduzierter Modelle, d.h. man betrachtet nur Teilmengen der Aufgabenmenge, nicht möglich, da das Streuungsverhalten nicht zurückgeht. Ein Vergleich der zu den Aufgaben zugehörigen Spalten in Tabelle 11.63 offenbart ebenfalls eine heterogene Struktur. Die Variablenpaare 4c, d und 4b, e zeigen mehrere Übereinstimmungen, was den Positionierungen im Koordinatensystem in Abbildung 11.14 entspricht. Die Aufgabe 4d wird vorrangig mit dem S-Aspekt beantwortet, dessen Verständnis auch in Aufgabe 4c erfragt wird. Viele Schülerinnen und Schüler beantworten die Aufgabe 4e mit Hilfe des F-Aspektes, was die Nähe zu diesem Aufgabenteil erklären würde. Infolgedessen ist es denkbar, dass die Orientierung an den Integralaspekten die Klassifizierung nach Aufgabentypen überlagert. Eine eingehende Analyse wird in Abschnitt 11.3.4.4 vorgenommen. Folglich lässt sich keine eindeutig zu interpretierende Dimension für den Aufgabentyp der Verständnisaufgabe finden. Zieht man die Clusteranalyse aus Abschnitt 11.3.4.1 hinzu, so wurden dort in der Homogenitätsanalyse unter Berücksichtigung aller zwölf Aufgaben auch bei den richtig gelösten Aufgabenteilen der Aufgabe 4 homogene Strukturen beobachtet, wobei diese insbesondere bei den Aufgaben 4a, b und 4d, e vorliegen. Diese besondere Situation bei Aufgabe 4c könnte mit der Lösungsverteilung in den Kursen (vgl. Abbildung 11.6) zusammenhängen, nach der zwei Kurse keine Lösungen und ein Kurs überdurchschnittlich gute Ergebnisse lieferte. Eine vergleichbare Situation findet sich bei Aufgabe 1, die laut Clusteranalyse zusammen mit 4c in einer Klasse liegt. Da man in den Kategorienquantifikationen der Gesamtuntersuchung (vgl. Tabelle 15-53) keine Dimension bestimmen kann, auf die alle fünf Aufgabenteile gleichermaßen laden, bestätigt dies die Vermutung, dass die heterogenen Anforderungsniveaus die eindeutige Dimensionszuweisung erschwert.

Die einzige Variable, die bei den Aufgaben 4a-e und mit Abstrichen bei Aufgabe 5 eine Verbindung zwischen den Aufgaben darstellt, ist die des Geschlechts (vgl. Tabelle 11.63). Während in allen Problemlöseaufgaben die Jungen die besseren Erfolgschancen besitzen, ist das Verhältnis bei diesen Aufgaben ausgeglichen. Dies wurde in den Einzelanalysen der Aufgaben schon gedeutet und bestätigt sich hier.

11.3.4.4 Die Integralaspekte

In der Testkonzeption wurden den Aufgaben die einzelnen Aspekte als Voraussetzung für eine erfolgreiche Lösung zugewiesen (vgl. Abschnitt 11.1.2). Es werden in diesem Abschnitt die vier Integralaspekte diskutiert (vgl. Kapitel 7). Die Grundvorstellungen, Kumulation und Gesamteffekt, werden nicht thematisiert, da die Grundvorstellungen allen Aspekten zu Grunde liegen und sich insofern nicht trennscharf separieren lassen.

Der **Mittelwertaspekt**, der in den Aufgaben 2 und 4a abgefragt wird, wurde in Abschnitt 11.3.4.3 schon untersucht und zeigte, dass eine Abhängigkeit zwischen beiden Aufgaben besteht, die dahingehend interpretiert werden kann, dass in Aufgabe 4a das Verständnis des M-Aspektes nur hinsichtlich der schon gelösten zweiten Aufgabe gezeigt wird.

Der **F-Aspekt** ist zentraler Bestandteil der Aufgaben 1 und 4b. Er kann darüber hinaus in den Aufgaben 3, 4d und 5 genutzt werden. Die Testauswertung zeigt jedoch, dass in den Aufgaben 4d und 5 in erster Linie mit Hilfe des S-Aspektes argumentiert wurde. In Aufgabe 3 wurde vorrangig der Kumulationsaspekt verwendet.

Die Analyse in Abschnitt 11.3.4.3 deutete auf Zusammenhänge der Aufgaben 4c und 4d hinsichtlich ihrer Zuordnung zu den einzelnen Aspekten. Hinzu kommt die Aufgabe 1, in der der F-Aspekt kalkülorientiert abgefragt wurde. Während die Spalten in Tabelle 11-63 der Aufgaben 4b und 4e sich nur wenig unterscheiden, ist der Unterschied zur ersten Aufgabe beträchtlich. Bei Aufgabe 1 haben neben der Zugehörigkeit zu einem Leistungskurs die gute Note, das positive Interesse, das weibliche Geschlecht, der Computereinsatz und die Schulform Gymnasium einen positiven Einfluss auf die Lösungswahrscheinlichkeit.

Die Schülerinnen und Schüler haben bei den Aufgaben 4b und 4e ebenfalls eine leichte Tendenz, erfolgreicher zu sein, oder anders gesagt, tritt bei diesen Aufgaben die Dominanz seitens der Jungen in den Hintergrund. Insofern lässt sich von einer tendenziellen Überlegenheit der Mädchen beim F-Aspekt sprechen.

Der Unterrichtsversuch hat nur in der Vergleichsuntersuchung leichte Vorteile zu Gunsten der KLIP-Kurse gezeigt. Ansonsten kann man von einem ausgeglichenen Verhältnis hinsichtlich des Verständnisses des F-Aspektes zwischen den beiden Gruppen sprechen.

Tabelle 11-68. Diskriminanzmaße und Eigenwerte (n=119; A1,4b,e)

	Dimension 1	Dimension 2
Eigenwerte	0,484	0,278
Diskriminanzmaße		
Aufgabe 1	0,40	0,60
Aufgabe 4b	0,51	0,16
Aufgabe 4e	0,54	0,07

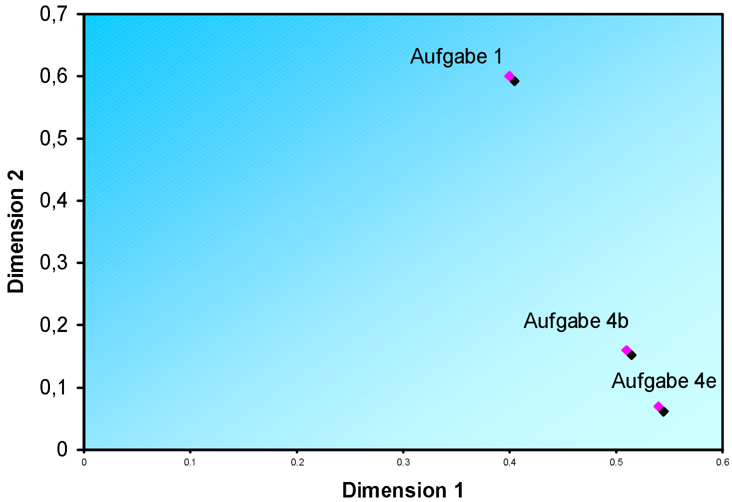
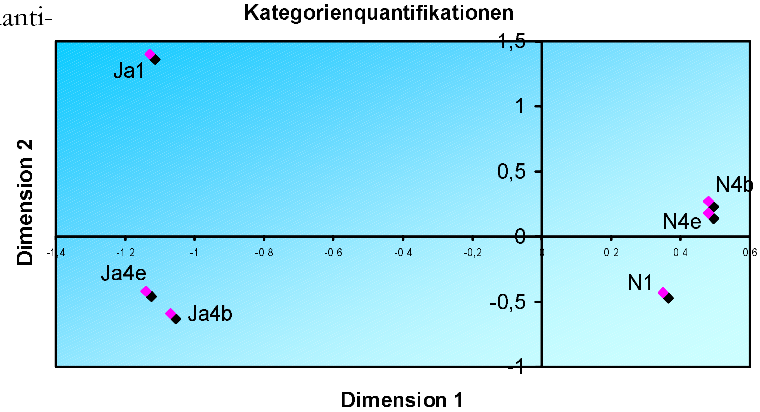


Abbildung 11.16. Diskriminanzmaße (n=119; A1,4b,e)

Auf der ersten Dimension laden alle drei Aufgaben sehr ähnlich. Der gute Eigenwert weist auf eine gute Trennfähigkeit der Kategorien hin. Da alle Aufgaben auf dieser Dimension gleichermaßen laden, lässt diese sich mit dem F-Aspekt identifizieren. Die zweite Dimension, die schwächer trennt als die erste Dimension, umfasst vermutlich den kalkülorientierten Charakter der Aufgaben und den Umstand, dass es sich um eine im Unterricht geübte Aufgabe handelt, die mit einer guten Vorleistung und Interesse lösbar ist. Damit wären auch die oben erwähnten Unterschiede in Tabelle 11.63 erklärt.

Abbildung 11.17. Kategorienquantifikationen (n=119; A1,4b,e)



Die Quantifikationen der Kategorien zeigen noch einmal deutlich, dass die Kategorien der Aufgaben 4b und 4e viele gemeinsame Objekte besitzen. Das ist verwunderlich, da die Lösung der Aufgabe 4e ebenso sinnvoll mit dem S-Aspekt hätte gelöst werden können. Die Auswertung der einzelnen Fragebögen weist jedoch die Nutzung des F-Aspektes bei mehr als 80% der Lösungen auf. Damit zeigt sich der F-Aspekt offensichtlich als der stabilste Begriff bei den Schülerinnen. Dies ist nicht nur bei den Vergleichskursen der Fall, sondern auch die Schülerinnen und Schüler der KLIP-Kurse beziehen sich in vielen Erklärungen auf diesen Aspekt. Dies kann daran liegen, dass dieser Aspekt eine naheliegende geometrische Deutung des Integrals bereitstellt, ähnlich wie die Tangentensteigung zum Ableitungsbegriff.

Zudem wird sehr deutlich, dass die richtige Lösung einer Kalkülaufgabe nicht notwendig Verständnis der zu Grunde liegenden Aspekte nach sich zieht bzw. das Verständnis eines Begriffes nicht Kalkülfähigkeiten in dem Bereich sichert. In welche Richtung diese Abhängigkeiten bzw. Unabhängigkeiten stärker wirken, kann hier nicht evaluiert werden.

Der **S-Aspekt** wird in der Aufgabe 4c direkt abgefragt und wurde weiterhin primär in den Aufgaben 4d und 5 verwendet. Zum S-Aspekt ermittelt HOMALS keine Homogenität. Zwar laden die drei Aufgaben 4c, d und 5 in der ersten Dimension vergleichbar, in der zweiten Dimension bestehen jedoch bedeutende Unterschiede, die sich in den Kategorienquantifikationen durch sehr unterschiedliche Positionen im $\mathbb{R}^2$ ausdrücken. Da die zweite Dimension nur einen Eigenwert von 0,24 mit $m=3$ besitzt, wäre es denkbar, diese zu vernachlässigen und die Übereinstimmung in der ersten Dimension als Grundlage für eine Interpretation durch den S-Aspekt zu sehen. Doch das würde eine zu starke Informationsreduktion bedeuten.

Dieses Ergebnis weist dennoch nicht auf eine fehlende Beziehung dieser Aufgaben bezüglich des S-Aspektes hin, sondern in Anbetracht der vielfältigen Fragestellungen dieser Arbeit und den mannigfachen Verknüpfungsmöglichkeiten der Aspekte lässt sich davon ausgehen, dass nur die herausragendsten Beziehungen exploriert werden können. Hinzu kommt, trotz der unterstellten homogenen Aspektstruktur, die heterogene Struktur der Anforderungen, die diese Aufgaben an die Schülerinnen und Schüler stellen. Aufgabe 4c ist eine reine Verständnisaufgabe, bei der einigen Schülerinnen und Schülern der Begriff „Differenzieren" nicht geläufig war. Aufgabe 4d ist mit einer Problemstellung verknüpft und stellt aufgrund ihrer Beziehung zu der Fahrtenschreiberaufgabe für die Schülerinnen und Schüler aus KLIP einen Vorteil bereit und Aufgabe 5 ist in erster Linie auf der ikonischen Repräsentationsebene bearbeitbar.

Die Aufgaben, in denen der **A-Aspekt** gezeigt werden konnte, sind die Aufgaben 2c und 3b. Alle bisher durchgeführten Untersuchungen weisen ein homogenes Lösungsverhalten bei diesen Aufgaben nach, das jedoch durch das Problemlöseverhalten überlagert wird. Ein möglicher Einfluss des Approximationsaspektes lässt sich auf Grundlage des vorliegenden Daten-Materials nicht belegen.

11.3.4.5 Anschauliche Argumentationen

Alle Aufgaben, die mit Hilfe des F-Aspektes zu lösen sind, enthalten geometrische Argumente. Das bedeutet, in den Aufgaben 1, 3, 4b, d und 5 wird die geometrische Anschauung angesprochen. Dabei ist zu vermuten, dass aufgrund der gegebenen Graphen das ikonische Repräsentationsniveau in den Aufgaben 3 und 5 besonders angesprochen wird. Dies wäre eine Erklärung für das in Abbildung 11.10 beobachtete Cluster aus den Aufgaben 3b, c und 5. Ansonsten existieren keine Hinweise auf eine Beziehung zwischen diesen Aufgaben und dem Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler. Auch eine gesonderte Untersuchung der Mädchen und der Jungen in der Gesamtpopulation liefert keine ergänzenden Einsichten. Dies kann wiederum an der Überlagerung verschiedener Effekte liegen.

11.3.4.6 Die Kursart als Einflussfaktor

Die Zugehörigkeit zu einem Leistungskurs zeigt sich bei sehr vielen Aufgaben als relevanter Einflussfaktor auf ein positives Lösungsverhalten. Dieser Vorteil wird wesentlich durch die beiden gymnasialen Leistungskurse und hier insbesondere durch den KLIP-Leistungskurs bestimmt. Ein Vorteil der Leistungskurse ist insofern keine Überraschung, da diese meist von Schülerinnen und Schülern mit guten Vornoten und Interesse an der Mathematik besucht werden (vgl. Tabelle 11-3).

Nur bei den Aufgaben 2c und 3b ist in beiden Konstellationen kein Einfluss des Leistungskurses zu bemerken und bei den Aufgaben 1, 4b und 5 trifft dies nur in der ersten Konstellation zu (vgl. Tabelle 11.63). Bei den Aufgaben 1 und 5 liegt dies insbesondere am schwachen Abschneiden des Leistungskurses der Gesamtschule. Bei den anderen Aufgaben ist es oft die gute Leistung des GKUC2, der zum Teil bessere Ergebnisse als der gymnasiale Vergleichsleistungskurs vorwies (vgl. Aufgaben 2c, 3b und 4b in Abbildung 11.6). Bei den Aufgaben 2b und 3b ist die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Schüler bzw. eine Schülerin eines KLIP-Grundkurses sogar größer als für einen Schüler bzw. für eine Schülerin aus dem Kontroll-Leistungskurs (vgl. Abschnitte 11.3.3.4 & 11.3.3.5). Damit deuten sich gerade bei den Problemlöseaufgaben beachtenswerte Gewichtungen zu Gunsten einer KLIP-Teilnahme in Abgrenzung zu der Zugehörigkeit zu einem Leistungskurs an.

11.3.4.7 KLIP-Teilnahme und Computereinsatz

Dieser für die Aufgaben 2b-3b beschriebene Vorteil der Schülerinnen und Schüler, die an KLIP teilgenommen haben, ist ebenfalls in der noch nicht berücksichtigten Problemlöseaufgabe, Aufgabe 3c, vorhanden (vgl. Tabelle 11-63), wodurch sich die zu Beginn des Unterrichtsversuchs aufgestellte Hypothese einer Förderung von Problemlösefähigkeiten durch die KLIP-Teilnahme offensichtlich bestätigt. Ansonsten ist in der ersten Konstellation nur bei Aufgabe 4d ein Vorteil der KLIP-Kurse zu beobachten. Dieser ist jedoch durch die Verbindung zur Fahrtenschreiberaufgabe begründet (vgl. Abschnitt 11.3.3.10). Berücksichtigt man nur die zweite Konstellation, so zeigen die Schülerinnen und Schüler des Unterrichtsversuchs bei allen Problemlöseaufgaben und bei fast allen Verständnisaufgaben die besseren Leistungen (vgl. Tabelle 11.63).

Aufgrund der zentralen Betonung der Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler und des Erfindens von Mathematik durch die Schülerinnen und Schüler bestand die Befürchtung, dass sie bei Standardaufgaben der Integralrechnung, Aufgaben 1 und 5, und durch die Abgabe von Routinetätigkeiten an den Computer bei Kalkülaufgaben, Aufgaben 1 und 2a, Nachteile gegenüber klassisch unterrichteten Schülerinnen und Schülern besitzen. Für die Aufgaben 1 und 5 bestätigte sich diese Befürchtung nicht. Dort zeigten die Schülerinnen und Schüler aus KLIP vergleichbare Leistungen. Bei Aufgabe 5 hatten sie in der zweiten Konstellation sogar signifikante Vorteile (vgl. Tabelle 11-63). Nur bei Aufgabe 2a zeigten die Vergleichskurse ein deutlich besseres Lösungsverhalten. Da diese Aufgabe jedoch mit für die Integralrechnung bereichsunspezifischen Inhalten und mit einer hohen Lösungswahrscheinlichkeit für die Gesamtpopulation (vgl. Abbildung 11.2) für die Integralrechnung nicht repräsentativ ist, kann sie vernachlässigt werden. Vielmehr drückt sie ein in TIMSS schon beobachtetes Phänomen aus, dass die bei Aufgaben mit hohem Anforderungsniveau leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler bei Aufgaben mit niedrigerem

Anforderungsniveau bessere Leistungen als leistungsstarke Schülerinnen und Schüler zeigen. Folglich kann hinsichtlich der Bearbeitung von Problemlöse- und Kalkülaufgaben von einem Erfolg für die Schülerinnen und Schüler des Unterrichtsversuchs gesprochen werden.

Abgesehen von Aufgabe 4e, die außergewöhnlich gut durch den Vergleichsleistungskurs gelöst wurde (vgl. Abschnitt 11.3.3.11), sind die korrekten Ergebnisse der Aufgaben 4a, b, c, d in der zweiten Konstellation ebenfalls primär durch die KLIP-Kurse erstellt worden. Der Unterschied zur ersten Konstellation, in der kein Einfluss beobachtet werden konnte (vgl. Tabelle 11-63), kann im Wesentlichen auf zwei Gründe zurückgeführt werden. Es kann an den zum Teil sehr schwachen Leistungen des Gesamtschul-Leistungskurses liegen, die in die zweite Konstellation nicht mit eingehen. Da dieser Kurs zugleich aber auch der einzige KLIP-Kurs war, der ohne Einsatz des Computers gearbeitet hat, kann der Einsatz des Computers über die Teilnahme am Unterrichtsversuch hinaus an dieser Stelle positive Einflüsse gezeigt haben, worauf insbesondere die Auswertungen zu den Aufgaben 4a und c hinweisen (vgl. Tabelle 11-63). Da bei diesen Aufgaben die Schulform ebenfalls relevant die Lösungswahrscheinlichkeiten beeinflusst, lässt sich keine dieser Hypothesen ablehnen.

Möchte man den Einfluss des Computers gegenüber dem Einfluss des Unterrichtsversuchs separieren, sind die Aufgaben von Interesse, bei denen sich der Einfluss der beiden Variabeln unterscheidet. Das sind neben den schon genannten Aufgaben 4a und c die Aufgaben 1, 2b, c, 3b, c und 5, in denen der Einfluss des Computers den der KLIP-Teilnahme erhöht. Bei diesen Aufgaben handelt es sich im Wesentlichen um Problemlöseaufgaben und Aufgaben, in denen auf anschaulicher Ebene argumentiert werden muss. Dieser deutliche Einfluss des Computers spricht für eine Unterstützung dieser Fähigkeiten und bestätigt insofern die in Abschnitt 4.1 beschriebenen Funktionen des Computereinsatzes. Erstaunlich ist zudem, dass der Computer positiven Einfluss auf eine erfolgreiche Lösung bei Aufgabe 1 besitzt. Gerade die Schülerinnen und Schüler, die den Computer benutzt haben, waren in der Lage, die Nullstellen zu berücksichtigen, wodurch sie die Kenntnis des F-Aspektes nachwiesen. Somit konnte selbst eine sogenannte Kalkülaufgabe von den Schülerinnen und Schülern aus KLIP besser gelöst werden, da die Schülerinnen und Schüler, die den Computer benutzt haben, deutlich mehr Verständnis für die in dieser Aufgabe geforderten inhaltlichen Zusammenhänge besaßen. Dies spricht dafür, dass der Computer im Begriffsbildungsprozess die Konzentration auf das Wesentliche ermöglicht. In diesem Zusammenhang wäre in späteren Untersuchungen die Frage noch zu beantworten, ob gerade der Einsatz des Computers als Werkzeug diese Vorteile mit sich bringt.

Abschließend sei zu der offenen Frage nach einem Vergleich der Einflussstärken der Variablen Schulform und Computereinsatz bemerkt, dass es bei den drei Kursen mit Computereinsatz noch einen vielleicht entscheidenden Unterschied gab. Die Schülerinnen und Schüler der Kurse LKUC und GKUC2 haben im Gegensatz zu dem Kurs GKUC1 den Computer zu Hause benutzt (vgl. Tabelle 15.1). Betrachtet man die Ergebnisse dieser beiden Kurse (vgl. Abbildung 11.6), so fällt auf, dass bei 5 von 12 Aufgaben die beiden Kurse die höchsten Lösungshäufigkeiten und bei weiteren 5 Aufgaben sich unter den ersten dreien befinden. Damit zeigen diese beiden Kurse den größten Einfluss auf das Lösungsverhalten.

Ebenso zeigt die Analyse der Forschungshefte, dass diese beiden Kurse in der Begriffsentwicklung am Weitesten vorangekommen sind, was auf eine Abhängigkeit der erfolgreichen Testbearbeitung von selbstentwickelter Mathematik hinweist.

Ferner scheinen diese beiden Kurse in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler (vgl. Tabelle 15.1) der Konzeption des Unterrichtsversuchs am meisten entsprochen zu haben, wobei der Leistungskurs LKUC noch etwas mehr Übereinstimmung mit den Determinanten von KLIP zeigt.

11.3.4.8 Das Geschlecht als Einflussfaktor

Die Variable Geschlecht als Einflussfaktor zeigt sich hinsichtlich der Klassifizierung in Aufgabentypen als relevant. Jungen weisen bei Problemlöseaufgaben die besseren Leistungen vor, bei reinen Kalkülaufgaben und bei Verständnisaufgaben halten sich Mädchen und Jungen die Waage. Damit bestätigt sich tendenziell die in Kapitel 5 angenommene Zuweisung bestimmter Denkformen auf Mädchen und Jungen. Dennoch sind die Jungen hinsichtlich der Lösung des Gesamttestes deutlich besser als die Mädchen. Zusammen mit der Zugehörigkeit zum Leistungskurs besteht für diese Gruppe die höchste vorausgesagte Lösungswahrscheinlichkeit für die Gesamtheit aller Aufgaben.

Bemerkenswert ist zudem der Vorteil der Mädchen bei der Aufgabe 1. Diese Aufgabe ist ein typisches Beispiel für eine Aufgabe, die schematisch lösbar ist. Bei Aufgabe 5, der anderen schematisch lösbaren Aufgabe des Tests sind in der zweiten Konstellation ebenfalls Vorteile zu Gunsten der Mädchen erkennbar (vgl. Tabelle 11.63). Das würde zum einen den schon erwähnten Nachteil der Mädchen bei Problemlöseaufgaben stützen, da diese ja gerade als Aufgaben definiert werden können, die *nicht* mit Hilfe eines Schemas lösbar sind. Da dieser Umkehrschluss natürlich in dieser Form nicht zulässig ist, scheint an dieser Stelle noch anderen Faktoren eine Bedeutung zuzukommen, die aber auf Grundlage des vorliegenden Datenmaterial nicht exploriert werden können.

KAPITEL XII

12 Die Auswertung der Fragebögen

Der Ausgangspunkt des Konzeptes KLIP war ein Perspektivwechsel von der Stofforientierung aus Sicht der Lehrperson zu Gunsten einer stärkeren Gewichtung der kognitiven, affektiven und sozialen Perspektive der Schüler und Schülerinnen. Dabei sieht KLIP vor, dass die Schülerinnen und Schüler sich weitestgehend innerhalb der Lernumgebung frei entfalten können. Dennoch existieren nicht geringe Beschränkungen durch die Lernumgebung. Sie enthält neben den institutionellen Rahmenbedingungen vorgegebene Problemstellungen, die bearbeitet werden müssen, Forschungshefte, in denen der Bearbeitungsprozess dokumentiert werden muss, einen Computer, ohne den ein gewichtiger Teil der Anforderungen gar nicht bewältigt werden kann und nicht zuletzt sieht KLIP Arbeits- und Sozialformen vor, die den Schülerinnen und Schülern einen hohen Grad an Selbstständigkeit und Teamfähigkeit abverlangen. Dies kann, trotz der Zielperspektive von KLIP, ein hohes Maß an Freiheitsbeschränkung für die einzelne Schülerin bedeuten. Aus diesem Grund soll neben den Untersuchungen zur Begriffsentwicklung und der Förderung einzelner Bildungsziele auch die Perspektive der Schülerinnen und Schüler diskutiert werden.

12.1 Die Befragung

Dazu wurden die Schülerinnen und Schüler, die an KLIP teilgenommen haben, nach ihrer Einschätzung zu Teilaspekten von KLIP befragt. Sie erhielten am Ende der Unterrichtsreihe Fragen zum Werkstattunterricht, insbesondere zum Computereinsatz, zu den Forschungsheften, zu den Intentionalen Problemen, zu den Sozialformen u.a. (vgl. Anhang C). Von den 81 ausgegebenen Fragebögen wurden 67 ausgefüllt zurückgegeben, wobei die Schülerinnen und Schüler des LKUO die Fragen zum Computereinsatz nicht beantworten sollten, da sie keinen Computer zur Verfügung hattten.

12.1.1 Forschungsfragen

Die nachfolgende Analyse wird sich an den folgenden Forschungsfragen orientieren:

1. Wie schätzen die Schülerinnen und Schüler ihr Interesse an den einzelnen Problemstellungen und deren Effizienz für ihre Wissenskonstruktionen ein?
2. Wie schätzen die Schülerinnen und Schüler den Einfluss des Computereinsatzes auf das Interesse am Mathematikunterricht und auf die Förderung von Problem- und Kalkülfähigkeiten ein?
3. Wie charakterisieren die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung der Forschungshefte hinsichtlich ihrer Effektivität für die Kognition?

4. Wie beurteilen die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Aspekte des Werkstattunterrichts, d.i. insbesondere die verwendeten Sozialformen, die geforderte Selbstständigkeit, das Interesse u.a.?

In den einzelnen Abschnitten werden diese Fragen zum Teil noch weiter differenziert.

Die Abschnitte sind nach Sinnzusammenhängen strukturiert. Es werden Fragen zu den Forschungsheften, zu den Intentionalen Problemen, zum Computereinsatz und zum Werkstattunterricht einzeln diskutiert. Die Kodierung der Teilnehmerinnen[167] sollte eine eindeutige Zuteilung der einzelnen Fragebögen zu der jeweiligen Probandin sicherstellen. Die Befragung lässt eine Einteilung nach Geschlecht, nach Schulzugehörigkeit und nach Noten zu. Die Noten werden in der hier dargestellten Auswertung nicht berücksichtigt. Eine Differenzierung nach Geschlecht wird an geeigneter Stelle vorgenommen.

12.1.2 Untersuchungsmethoden

In allen drei Fragebögen geht es darum, Einschätzungen zu KLIP herauszuarbeiten. Dazu wurden Fragen gestellt, die semantisch zusammengehören, d.h. dieselbe Forschungsfrage abdecken. Dieses Vorgehen gründet sich auf der Annahme, dass die Schülerinnen und Schüler die Fragen nicht gemäß ihres intendierten Inhalts verstehen müssen. Bei Existenz einer homogenen Struktur innerhalb der einzelnen semantisch zueinander gehörenden Fragen kann man von einem hohem Maß an Konsistenz bei der Beantwortung ausgehen. Diese ließe sich durch eine Faktorenanalyse nachweisen. Eine Gruppierung der beschriebenen Art sichert somit die Validität der Befragung.

Das Skalenniveau der Variablen ist ordinal: 1 = "stimmt genau", 2 = "stimmt größtenteils", 3 = "unentschieden", 4 = "stimmt nur teilweise", 5 = "stimmt gar nicht". Da aber davon ausgegangen werden kann, dass die Abstände zwischen den einzelnen Kategorien äquidistant sind, lassen sich die verwendeten Skalen ebenfalls metrisch interpretieren. Der verwendete Korrelationskoeffizient ist der Pearson-Korrelationskoeffizient. Schülerinnen und Schüler, die in einer der Variablen fehlende Werte haben, werden ausgeschlossen. Es werden je nach Fragestellung unterschiedliche Variablen in die Untersuchung einbezogen. Die Berücksichtigung aller Variablen würde aufgrund fehlender Werte in verschiedenen Variablen zu einer Verminderung der Probanden und Probandinnen führen. Zur Auswahl einer geeigneten Anzahl an Faktoren werden neben inhaltlichen Erwägungen das Kaiser-Kriterium und der Scree-Test verwendet.

Von einer Indexbildung der Aussagewerte der Variablen, die gemeinsam auf einen Faktor laden, wird abgesehen, da die so entstehenden Faktorwerte nicht in der Lage sind die Verteilungen der einzelnen Variablen und Relationen zwischen den Variablen wiederzugeben. Stattdessen werden auf Grundlage der Ladungen der einzelnen Variablen für den jeweiligen Faktor repräsentative Variablen ausgewählt und deren Antworthäufigkeiten für die für die Untersuchung interessanten Fragen diskutiert.

12.2 Die Forschungshefte

In Kapitel 11 wurde die Begriffsentwicklung auf Grundlage der Dokumentationen in den Forschungsheften diskutiert. Es zeigte sich, dass die Hefte die Wissenskonstruktion erfolgreich unterstützen. Das Führen dieser Hefte bedeutet jedoch auch sehr viel Arbeit für die Schülerinnen und Schüler und übersteigt den üblichen Zeitrahmen für Hausaufgaben. Vor diesem Hintergrund sind die folgenden Fragen von Interesse:

[167] Vgl. Frage 1 im Anhang C. Abschnitt 16.1.

1. Erachten die Schülerinnen und Schüler das Schreiben eines Forschungshefts als sinnvoll und sind, ungeachtet des damit verbundenen Arbeitsaufwandes, an einer Fortführung interessiert?
2. Welche Aspekte des Forschungshefts sind für die Schülerinnen und Schüler von Vorteil und welche von Nachteil und inwieweit stehen diese Aspekte in Relation zueinander?

Die erste Frage wird auf Grundlage der Antworthäufigkeiten diskutiert. Mit der zweiten Frage soll ein möglicher Zusammenhang unter den Aspekten untersucht werden. Das hängt mit der oben erwähnten Gruppierung von semantisch vergleichbaren Fragen, aber auch mit den noch zu explorierenden Relationen zusammen. Die dazu notwendige Analyse wird mit Hilfe der linearen Hauptkomponentenmethode durchgeführt.

Tabelle 12-1. Eigenwerte und Varianzanteile

Faktor	Eigenwerte	Varianzanteil an der Gesamtvarianz (%)	
			kumuliert
1	4,008	44,530	44,530
2	1,444	16,047	60,576

Tabelle 12-2. Ladungen zu Faktor 1 zu den Forschungsheften

Faktor 1	Ladung
F2. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da ich so ein individuelles Schulbuch besitze.	0,816
F12. Das Forschungsheft gefällt mir nicht gut, da es unübersichtlicher ist als ein Schulbuch.	-0,729
F4. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da es mir hilft das Gelernte zu strukturieren.	0,700
F1. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da es mir ermöglicht selbst erfundene Mathematik niederzuschreiben	0,692
F14. Das Forschungsheft hilft mir mich auf die Klausuren vorzubereiten.	0,622

Es gibt zwei Eigenwerte über 1, was die Extraktion von zwei Faktoren bedeutet. Die fünf Variablen laden alle mit Werten vom Betrag größer als 0,62 auf dem ersten Faktor. Mit Ausnahme der Frage F1 betonen sie die Eigenschaft des Forschungshefts, ein individuelles Schulbuch für die Schülerinnen und Schüler darzustellen. Dabei wird insbesondere die Struktur des Hefts hervorgehoben, die es den Schülerinnen und Schülern gestattet, sich angemessen auf Klausuren vorzubereiten. Dies zeigt ein hohes Maß an Konsistenz bei der Beantwortung der Fragen hinsichtlich eines Strukturierungsaspektes. Zudem treten bei dieser wie auch bei den manifesten Variablen keine Nebenladungen auf.

Tabelle 12-3. Ladungen zu Faktor 2 zu den Forschungsheften

Faktor 2	Ladung
F9. Im Forschungsheft kann ich die Ergebnisse meiner eigenen Forschung niederschreiben.	0,881
F6. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da ich selber bestimmen kann, welche Aufgaben und welche Beispiele für mich wichtig und hilfreich sind.	0,815
F5. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da ich dort auch Dinge notieren kann, die ich noch nicht verstanden habe.	0,694
F7. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da es meine individuelle Sprache enthält.	0,684

Auch für den zweiten Faktor lassen sich vier Variablen finden, die mit Werten dem Betrag nach sehr hoch auf dem Faktor laden. Alle vier Variablen heben sehr stark einen Individualitätsaspekt des Forschungshefts hervor, wie z.B.: die individuelle Sprache und die Möglichkeit, selbst zu entscheiden, welche Beispiele oder welche Wissenslücken im Forschungsheft notiert werden.

Eine Ursache für die Zuordnung der ersten Frage zum ersten und nicht zum zweiten Faktor ist nur schwer ersichtlich. Die Korrelation zwischen den Fragen 1 und 9, die inhaltlich sehr ähnlich sind, beträgt 0,347 auf einem Signifikanzniveau von 0,01. Dies deutet darauf hin, dass der Strukturaspekt bei der Beantwortung dieser Frage eine größere Rolle gespielt hat als der Individualitätsaspekt, der natürlich auch in den ersten Faktor eingeht.

Als repräsentative Fragen bezüglich der beiden Faktoren werden die Fragen F2 und F9 diskutiert. Aus inhaltlichen Gründen werden ebenfalls die Fragen 4 und 14 analysiert. Darüber hinaus sind die Fragen 3, 4, 8, 10, 11, 15-17 von Interesse. Diese Fragen wurden nicht in die Faktorenanalyse einbezogen.

Tabelle 12-4. Relative Häufigkeiten der Antworten zum Forschungsheft

Fragen zum Forschungsheft	stimmt genau	stimmt größtenteils	unentschieden	stimmt nur teilweise	stimmt gar nicht
F2. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da ich so ein individuelles Schulbuch besitze.	10,9	34,5	21,8	21,8	10,9
F3. Das Forschungsheft gefällt mir nicht gut, da das Schreiben des Forschungshefts viel Arbeit ist.	10,9	27,3	30,9	10,9	20
F4. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da es mir hilft das Gelernte zu strukturieren.	16,4	50,9	21,8	7,3	3,6
F8. Das Führen des Forschungshefts macht nicht mehr Arbeit als die normalerweise im Unterricht anfallenden Arbeiten.	5,5	14,5	14,5	34,5	30,9
F9. Im Forschungsheft kann ich die Ergebnisse meiner eigenen Forschung niederschreiben.	18,2	60	5,5	12,7	3,6
F10. Während des Schreibens des Forschungshefts merke ich oft, dass einiges, von dem ich dachte, ich hätte es verstanden, doch noch nicht klar ist.	9,1	20	25,5	21,8	23,6
F11. Die Vorteile des Forschungshefts überwiegen gegenüber den Nachteilen.	3,6	38,2	32,7	20	5,5
F13. Mir würde es besser gefallen, wenn ich zusätzlich zum Forschungsheft noch ein Schulbuch hätte.	18,2	30,9	43,6	7,3	0
F14. Das Forschungsheft hilft mir mich auf die Klausuren vorzubereiten.	16,4	16,4	14,5	30,9	21,8
F15. Das Forschungsheft gefällt mir nicht gut, da ich nicht weiß, was ich alles in das Forschungsheft schreiben soll.	1,8	20	18,2	27,3	32,7
F16. Auch in anderen Fächern sollten Forschungshefte geführt werden.	10,9	12,7	25,5	21,8	29,1
F17. Ich halte es für sinnvoll, in Zukunft weiterhin ein Forschungsheft zu führen.	10,9	43,6	14,5	14,5	16,4

Die relativen Häufigkeiten sind in Prozent angegeben.

Das Forschungsheft als Schulbuch (F2: 45.33) [168] wird von den Schülerinnen und Schülern insgesamt zwar zustimmend, aber nicht uneingeschränkt positiv gesehen. Die positive Seite scheint sich wesentlich auf die Möglichkeiten zu beziehen, die eigenen Forschungsergebnisse (F9: 78.16) niederzuschreiben und dabei eine individuelle Struktur (F4: 67.11) zu entwickeln. Dieses individuelle Schulbuch reicht jedoch bei vielen Schülerinnen und Schülern nicht aus, sich angemessen auf die Klausuren vorzubereiten (F14: 33.53). Dies mag ein Grund dafür sein, warum sehr viele Schülerinnen und Schüler nichts gegen ein zusätzliches Schulbuch (F13: 49.7) einzuwenden hätten. Darin lässt sich ein grundsätzliches Bedürfnis erkennen oder aber die noch mangelnde Erfahrung mit Forschungsheften und der eigenen Begriffsentwicklung. Darüber hinaus macht für einen Großteil der Schülerinnen und Schüler das Führen eines Forschungshefts mehr Arbeit als die normalerweise durch den Unterricht anfallenden Arbeiten (F8: 20.65). Dies scheint aber nicht für alle Schülerinnen und Schüler Grund zu sein, das Forschungsheft abzulehnen (F3: 38.31).[169] Im Gegenteil knapp 42% der Schülerinnen und Schüler sind der Meinung, die Vorteile der Forschungshefte (F11: 42.26) überwiegen und sogar 54% möchten auch in Zukunft ein Forschungsheft (F17: 55.31) führen. Dieser Wunsch lässt sich jedoch nicht auf andere Unterrichtsfächer verallgemeinern (F16: 24.1). Ursache hierfür kann die Befürchtung einer sehr großen Arbeitsbelastung für die Schülerinnen und Schüler sein, eine Einschätzung, die sicher nicht unberechtigt ist.

In Abschnitt 2.3 wurde hervorgehoben, dass die schriftliche Fixierung der Lernergebnisse der Schülerin bzw. dem Schüler Zugang zu einer Metaebene eröffnet, auf der sie bzw. er gegebenenfalls Unstimmigkeiten in ihren bzw. seinen Konstrukten erkennen kann. Diese Sicht wird von den Schülerinnen und Schülern scheinbar nicht geteilt (F10: 29.45). Das kann daran liegen, dass die von mir aufgestellte Hypothese in diesem Kontext nicht viabel ist. Es kann aber auch sein, dass die Schülerinnen und Schüler die Frage dahingehend interpretieren, dass die Vorüberlegungen zum Schreiben nicht dem Schreiben zugerechnet werden. Die Korrektur der Hefte und das Gespräch mit den Schülerinnen und Schülern hat nach meiner Erfahrung in vielen Fällen eine derartige Auffassung zeigt.

Differenziert man die Population hinsichtlich des Geschlechts ist das Antwortverhalten im Großen und Ganzen homogen. Lediglich die Fragen 9 und 11 werden von den Jungen mit jeweils 10% mehr befürwortenden Antworten deutlich positiver und die Fragen 10 und 14 mit jeweils 8% mehr ablehnenden Antworten deutlich schlechter von den Jungen beurteilt. Damit scheint das Heft von den Jungen etwas besser angenommen zu werden, wobei der Aspekt der individuellen Forschung deutlich den Aspekt der Strukturierung dominiert. Ein solches Ergebnis würde der in dieser Arbeit formulierten Hypothese, dass das Heft mehr die Mädchen anspricht, widersprechen. Hier wären weitergehende Untersuchungen sehr interessant.

Eine Trennung der Population nach den Kursen, die im Test besser abgeschnitten haben (LKUC, GKUC2) und denen, deren Ergebnisse bei vielen Aufgaben schwächer ausgefallen sind (LKUO, GKUC1), zeigt bei fast allen Fragen deutliche Unterschiede. Dabei fällt bei den „besseren" Kursen besonders eine wesentlich höhere Zustimmung zur Fortführung der Hefte im Mathematikunterricht und dem Strukturierungsaspekt, insbesondere zur Klausurvorbereitung, auf. Zugleich wurde aber auch ein deutlich höherer Arbeitsaufwand

[168] (F2: 45.33) bedeutet, dass bei Beantwortung der Frage F2 45% der Schülerinnen die Kategorien „stimmt genau" oder „stimmt größtenteils" angekreuzt haben und 33% die Kategorien „stimmt nur teilweise" oder „stimmt gar nicht".
[169] Die Spearman-Korrelation zwischen den beiden Variablen F3 und F8 beträgt –0,275 auf einem Signifikanzniveau von 0,01.

benannt und eine Ausweitung der Forschungshefte auf andere Fächer deutlich abgelehnt. Dieses beobachtete Antwortverhalten weist auf Zusammenhänge zwischen hoher Arbeitsintensität, gelungener individueller Begriffsentwicklung und einer positiven Bewertung der Forschungshefte für den Mathematikunterricht hin. Die vorgenommene Aufteilung in jeweils zwei Kurse ist zum Teil willkürlich. Sie weist dennoch auf einen Zusammenhang hin, der einen Bedarf an weiteren detaillierten Untersuchungen zeigt.

Die vorliegende Untersuchung versteht sich als Anfangsuntersuchung, die sich zentral mit der Kategorie „Teilnahme an KLIP“ beschäftigt. Deswegen werden an dieser Stelle auch keine weiteren Separierungen der Population vorgenommen. Derartige Zusammenhänge werden in Nachfolgearbeiten weitergehend untersucht.

In diesem Abschnitt hat sich gezeigt, dass das Führen eines Forschungshefts von den Schülerinnen und Schülern, trotz der anfallenden Mehrarbeit, insgesamt als sinnvoll erachtet wird. Vor dem Hintergrund der vorgegebenen Fragen erweisen sich dabei der Individualitätsaspekt und der Strukturierungsaspekt als zentrale Faktoren für das Antwortverhalten.

12.3 Die affektive Dimension

Die affektive Dimension umfasst kurz- und langfristige Gestimmtheiten, die die Relation zwischen Individuum und von ihm unterscheidbaren Sachverhalten betreffen. In dieser Befragung werden die Affekte auf die Grundstimmungen Angst, Freude, Zufriedenheit und Interesse reduziert. Bezüglich der vom Individuum unterscheidbaren Sachverhalte werden zudem unterschiedliche Stufen der Allgemeinheit betrachtet.

Als erste Stufe ist dies die Selbstzufriedenheit, als zweite Stufe die Zufriedenheit in der Schule, die Freude am Mathematikunterricht als dritte und die Freude an KLIP als vierte Stufe.[170] Der Differenzierungsgrad der Fragen zu den einzelnen Stufen nimmt mit wachsendem Stufenrang zu. So existieren zu den ersten beiden Stufen jeweils nur eine Frage (A5 & A6) und zu der dritten und vierten Stufe jeweils fünf Fragen. Die Fragen zur vierten Stufe beziehen sich ausschließlich auf das Interesse an den Problemstellungen.

Zentrale Forschungsfragen sind:

1. Wie groß ist die Zustimmung bzw. Ablehnung der einzelnen Problemstellungen bei den Schülerinnen und Schülern?
2. Wie ist die affektive Relation der Schülerinnen und Schüler zum Mathematikunterricht

Es ist zu erwarten, dass sich vier Faktoren extrahieren lassen, die die einzelnen Stufen charakterisieren.

Tabelle 12-5. Eigenwerte und Varianzanteil

Faktor	Eigenwerte	Varianzanteil an der Gesamtvarianz (%)	
			kumuliert
1	3,184	26,533	26,533
2	2,102	17,514	44,047
3	1,315	10,961	55,008

[170] Die Stimmungen der Affekte sind hier positiv beschrieben, sie beinhalten selbstverständlich auch alle anderen Ausprägungen.

Es gibt drei Eigenwerte über 1, was die Extraktion von drei Faktoren bedeutet. Der vierte Eigenwert hat einen Wert von 0,98 und erklärt gut 9% der Gesamtvarianz. Die Zuordnungen der Fragen zu den einzelnen Faktoren entspricht den Erwartungen. Stufe 4 bzw. Stufe 3 werden in den Faktoren 1 und 2 repräsentiert und die Stufen 1 und 2 gehen in den dritten Faktor ein, wobei bei Berücksichtigung von vier Faktoren die beiden Stufen sich auf zwei Faktoren verteilen. Ein solches Vorgehen ließe sich hinsichtlich der Tatsache, dass der letzte Faktor nur eine Variable enthält auch bei einem Eigenwert von 0,98 rechtfertigen.

Tabelle 12-6. Ladungen zu Faktor 1 zu den Problemstellungen

Faktor 1	Ladung
P3. Das Problem „Fahrtenschreiber“ fand ich interessant.	0,735
P8. Die Auseinandersetzung mit den drei Problemstellungen war langweilig.	-0,733
P2. Das Problem „Wasserverbrauch“ fand ich interessant.	0,725
P1. Durch die neuen Probleme habe ich mich mehr als bisher auf den Mathematikunterricht gefreut.	0,671
P4. Das Problem „Geschlechterwachstum“ fand ich interessant.	0,595
A2. Ich freue mich auf den Mathematikunterricht.	0,483

Die fünf Variablen laden alle mit recht hohen Werten auf dem ersten Faktor. Sie zeigen eine inhaltliche Homogenität und lassen sich somit als Aspekt interpretieren, der das Interesse am Mathematikunterricht auf Grundlage der Intentionalen Probleme beschreibt. Nur die Variable A2 besitzt eine relevante Nebenladung, die weiter unten erklärt wird.

Tabelle 12-7. Ladungen zu Faktor 2 zu den Problemstellungen

Faktor 2	Ladung
A3. Vor den Mathematikklausuren habe ich Angst.	0,747
A4. Vor Mathematikklausuren habe ich schon immer Angst gehabt.	0,699
A1. Wenn ich an Mathematikunterricht denke, verspüre ich Angst.	0,675
A2. Ich freue mich auf den Mathematikunterricht.	-0,484

Auch für den zweiten Faktor lassen sich Variablen finden, die mit hohen Werten auf dem Faktor laden. Alle Variablen drücken Freude am Mathematikunterricht aus, so dass sich dieser Faktor dementsprechend interpretieren lässt. Es ist anzunehmen, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Einstellung zum Mathematikunterricht im Allgemeinen beschreiben, worauf auch die Ladung von A2 deutet.

Die Frage A2 lädt auf den Faktoren 1 und 2. Sie unterscheidet sich von den anderen Fragen des zweiten Faktors durch den bestimmten Artikel „*den*“ zu Mathematikunterricht. Damit ermöglicht sie die Identifikation *eines* Mathematikunterrichts mit *dem aktuellen* Mathematikunterricht, was die Ladungen auf beiden Faktoren erklären könnte.

Die Fragen zur Angst vor dem Mathematikunterricht laden zudem höher auf diesem Faktor, was dadurch zu erklären ist, dass „vor etwas keine Angst zu haben“ noch nicht bedeutet „sich darauf zu freuen“.

Faktor 3 lässt sich als Zufriedenheit mit den allgemeinen Lebensumständen charakterisieren. Bei beiden Variablen überwiegen deutlich die Zufriedenheitsbekundungen.

Die Aussagen innerhalb der Faktoren sind inhaltlich homogen. Dies zeigt, dass die Fragen in einer Gruppe von semantisch ähnlichen Äußerungen konsistent beantwortet wurden.

Damit ist gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler die vier Stufen der affektiven Dimension bzgl. der Einschätzung des Mathematikunterrichts unabhängig voneinander ähnlich beurteilen. Die Antworthäufigkeiten innerhalb der einzelnen Faktoren werden im Folgenden dargestellt.

Faktor 3	Ladung
A5. Ich bin mit mir und meinem Leben zufrieden.	0,728
A6. Ich fühle mich in der Schule wohl.	0,715

Tabelle 12-8. Ladungen zu Faktor 3 zu den Problemstellungen

Da die Frage nach der Auseinandersetzung mit den Problemstellungen relativ hoch auf dem ersten Faktor lädt und von den hochladenden Variablen die allgemeinste Fragestellung ist, werden nachfolgend die Antworthäufigkeiten dieser Frage dokumentiert. Um außerdem den Zuspruch zu den drei Intentionalen Problemen vergleichen zu können, werden die entsprechenden Antworthäufigkeiten dargestellt.

Tabelle 12-9. Die Auseinandersetzung mit den drei Problemstellungen war langweilig.

P8	Prozent (%)
stimmt genau	3,5
stimmt größtenteils	7,0
unentschieden	17,5
stimmt nur teilweise	38,6
stimmt gar nicht	33,3

Tabelle 12-10. Das Problem fand ich interessant:

Wasserverbrauch

P2	Prozent (%)
stimmt genau	10,5
stimmt größtenteils	26,3
unentschieden	28,1
stimmt nur teilweise	28,1
stimmt gar nicht	7

Fahrtenschreiber

P3	Prozent (%)
stimmt genau	17,5
stimmt größtenteils	35,1
unentschieden	22,8
stimmt nur teilweise	15,8
stimmt gar nicht	8,8

Geschlechterwachstum

P4	Prozent (%)
stimmt genau	17,5
stimmt größtenteils	42,1
unentschieden	17,5
stimmt nur teilweise	12,3
stimmt gar nicht	10,5

Das größte Interesse unter den drei Intentionalen Problemen fand mit 52,6% die Fahrtenschreiberaufgabe. Auf dem zweiten Platz befindet sich das Problem zum Geschlechterwachstum mit 49,6% und relativ weit abgeschlagen mit 36,8% Zustimmung und ebenso viel Ablehnung ist das Problem zum Wasserverbrauch auf dem dritten Platz. Dies bestätigt die in der Auswertung der Forschungshefte beobachtete Favorisierung der beiden erst genannten Problemstellungen. Für die jeweiligen Begründungen sei auf Kapitel 10 verwiesen.

Insgesamt wurden die Problemstellungen von nur 10,5% der Schülerinnen und Schüler als langweilig empfunden. Damit ist mit Blick auf die Einzelbewertung der Probleme dieser Teil von KLIP als Erfolg zu werten.

Der zweite Faktor lässt sich durch die Antwort zur Frage A3 repräsentieren. Da aber auch A1 vergleichbar auf dem Faktor lädt und den Mathematikunterricht direkt problematisiert, wird das Antwortverhalten zu dieser Frage stellvertretend dargestellt. Hier äußern 5% der Schülerinnen und Schüler, dass sie Angst vor dem Mathematikunterricht verspüren (A1:

5.88). Ein ähnliches Antwortverhalten ist bei A3 und A4 zu beobachten. Die Frage nach der Freude am Mathematikunterricht bestätigen nur 30% der Schülerinnen und Schüler (A2: 30.33).

Zu der Frage nach der Selbstzufriedenheit geben 81% der Schülerinnen und Schüler an, dass sie mit sich und ihrem Leben zufrieden sind (A5: 81.7) und in der Schule fühlen sich 49% der Schülerinnen und Schüler wohl (A6: 49.32).

Die Daten zeigen, dass der Mathematikunterricht bei den meisten Schülerinnen und Schülern nicht angstbesetzt ist. Die Freude ist erwartungsgemäß niedriger. Es ist bemerkenswert, dass das Interesse an den drei Problemen jeweils größer ist, als die Freude am Mathematikunterricht. Insofern lässt sich von einer positiven Wirkung der Intentionalen Probleme auf die Akzeptanz des Mathematikunterrichts sprechen. Das wird noch dadurch gestützt, dass sich 39% der Schülerinnen und Schüler mehr als bisher auf den Mathematikunterricht gefreut haben (P1: 39.40).

12.4 Die Problemstellungen

1. Wie beurteilen die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Problemstellungen hinsichtlich ihrer Effizienz für die erfolgreiche, d.h. viable, Wissenskonstruktion?

Zur Beantwortung dieser Frage werden alle Fragen zu den Problemstellungen berücksichtigt, sowohl die Fragen zu der affektiven als auch die Fragen zu der kognitiven Dimension. Aufgrund der Analyse der Forschungshefte ist zu vermuten, dass die beiden Probleme des Geschlechterwachstums und des Fahrtenschreibers auch hinsichtlich ihrer Effizienz für die Wissenskonstruktion auf einem Faktor laden.

Tabelle 12-11. Das Problem hat mir was gebracht:

Wasserverbrauch

	Prozent (%)
stimmt genau	8,8
stimmt größtenteils	21,1
unentschieden	38,6
stimmt nur teilweise	14
stimmt gar nicht	17,5

Fahrtenschreiber

	Prozent (%)
stimmt genau	19,3
stimmt größtenteils	31,6
unentschieden	24,6
stimmt nur teilweise	10,5
stimmt gar nicht	14

Geschlechterwachstum

	Prozent (%)
stimmt genau	12,3
stimmt größtenteils	29,8
unentschieden	35,1
stimmt nur teilweise	12,3
stimmt gar nicht	10,5

Die Antworten hinsichtlich der Wirkkraft der Problemstellungen sind vergleichbar mit denen zum Interesse. Während beim Wasserverbrauch ein sehr indifferentes Antwortverhalten zu beobachten ist, finden die anderen beiden Probleme mehr Zustimmung als Ablehnung. Die Favorisierung des Fahrtenschreibers gegenüber dem Geschlechterwachstum kann mit dem unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad der Probleme erklärt werden. Sie lässt sich eventuell auch auf die in den Forschungsheften ergiebige Begriffsentwicklung zurückführen. Eine detailliertere Differenzierung ist auf Grundlage der vorhandenen Informationen nicht möglich.

Augenfällig sind in dieser Befragung ebenfalls wieder die beiden Leistungskurse. Während der LKUC überdurchschnittliche hohe Zustimmung zu den letzten Fragen zu verzeichnen hat, reagieren die Schülerinnen und Schüler aus den Kurs LKUO vielfach ablehnend oder indifferent. Dies ist nicht verwunderlich, wenn man sich vor Augen führt, dass eine nicht vollzogene Begriffsentwicklung natürlich auch keine positive Bewertung hinsichtlich der Wirkkraft nach sich ziehen kann.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der Einsatz der Intentionalen Probleme auch aus Sicht der Schülerinnen und Schüler als Anstoß und Bedingung für eine erfolgreiche Begriffsentwicklung gesehen wird.

12.5 Der Computereinsatz

Mit den Fragen R1-R14 sollten Einstellungen zum Computereinsatz auf Seiten der Schülerinnen und Schüler abgefragt werden. Die Fragen sind auf die in Kapitel 4 dargelegten Dimensionen des Computereinsatzes fokussiert. Hierbei geht es mir speziell um die Herausarbeitung von affektiven und kognitiven Gesichtspunkten. Hinsichtlich der affektiven Dimension soll die Frage beantwortet werden, ob das Interesse am Mathematikunterricht durch den Einsatz des Computers gesteigert wird. In der kognitiven Dimension wird insbesondere die Beeinflussung der Pole Kalkülfähigkeit und Problemlösefähigkeit durch den Computer analysiert.

1. Wie beurteilen die Schülerinnen und Schüler den Einfluss des Computereinsatzes auf das Interesse am Mathematikunterricht?
2. Wie beurteilen die Schülerinnen und Schüler mögliche Veränderungen ihrer Kalkülfähigkeiten und ihres Verständnis von Mathematik durch den Einsatz des Computers?
3. In welchen Bereichen sehen die Schülerinnen und Schüler die größten Vorteile des Computereinsatzes?

Zur Untersuchung der ersten beiden Forschungsfragen werden nur die Variablen einbezogen, die eine Gruppierung hinsichtlich der Förderung des Interesses und möglicher Veränderungen von Kalkülfähigkeiten und des Verständnisses erlauben.

Tabelle 12-12. Eigenwerte und Varianzanteile

Faktor	Eigenwerte	Varianzanteil an der Gesamtvarianz (%)	
			kumuliert
1	4,583	45,830	45,830
2	2,105	21,055	66,885

Tabelle 12-13. Ladungen zu Faktor 1 zum Computereinsatz

Faktor 1	Ladung
R11. Ich möchte auch in Zukunft mit Einsatz des Computers im Mathematikunterricht arbeiten.	0,897
R3. Durch den Einsatz des Computers wird der Unterricht zwar anders, aber nicht unbedingt besser oder interessanter.	-0,875
R1. Der Mathematikunterricht ist durch den Einsatz des Computers interessanter geworden.	0,861
R4. Der Einsatz des Computers ist ganz nett, aber eine wirkliche Verbesserung des Unterrichts bringt er nicht.	-0,816
R9. Durch den Einsatz des Computers macht der Mathematikunterricht mehr Spaß.	0,803
R6. Eigentlich mag ich überhaupt nicht mehr ohne den Computer arbeiten.	0,649

Alle fünf Variablen, die auf dem ersten Faktor laden, weisen hohe Werte auf. Sie zeigen eine inhaltliche Homogenität und lassen sich als Aspekt interpretieren, der den Einfluss des Computers auf das Interesse am Mathematikunterricht beschreibt. Damit ist die Konsistenz der Antworten hinsichtlich der Forschungsfragen gezeigt.

Tabelle 12-14. Ladungen zu Faktor 2 zum Computereinsatz

Faktor 2	Ladung
R4. Seit wir den Computer verwenden, habe ich Schwierigkeiten, wenn ich Beispiele ohne Computer lösen soll.	0,854
R2. Ich brauche durch den Einsatz des Computers nicht mehr über Formeln nachzudenken.	0,726
R8. Durch das Nachdenken über die Computerbedienung werde ich öfters von mathematischen Problemen abgelenkt.	0,565
R7. Der Umgang mit dem Computer erschwert mir mein Verständnis der Mathematik.	0,448

Auch auf den zweiten Faktor laden nur Variablen mit Werten, die größer als 0,44 sind. Durch alle Variablen wird der Zusammenhang zwischen Computer, Kalkül und Verständnis problematisiert, der insofern inhaltlich entsprechend interpretiert werden kann.

Tabelle 12-15. Die relativen Häufigkeiten zum Computereinsatz

Fragen zum Computereinsatz	stimmt genau	stimmt größtenteils	unentschieden	stimmt nur teilweise	stimmt gar nicht
R1. Der Mathematikunterricht ist den Einsatz des Computers interessanter geworden.	19,6	34,8	15,2	23,9	6,5
R2. Ich brauche durch den Einsatz des Computers nicht mehr über Formeln nachzudenken.	0	13	19,6	28,3	39,1
R4. Seit wir den Computer verwenden, habe ich Schwierigkeiten, wenn ich Beispiele ohne Computer lösen soll.	0	17,4	10,9	37	34,8
R7. Der Umgang mit dem Computer erschwert mir mein Verständnis der Mathematik.	10,9	8,7	21,7	13	45,7
R8. Durch das Nachdenken über die Computerbedienung werde ich öfters von mathematischen Problemen abgelenkt.	6,5	15,2	17,4	23,9	37
R10. Ich verstehe mathematische Probleme besser, wenn ich sie zuerst ohne Computer gelöst oder wenigstens angedacht habe.	23,9	43,5	19,6	4,3	8,7
R11. Ich möchte auch in Zukunft mit Einsatz des Computers im Mathematikunterricht arbeiten.	39,1	26,1	19,6	8,7	6,5
R12. Ein großer Vorteil des Computers liegt in seiner Stärke bei Rechenaufgaben	21,7	47,8	28,3	2,2	0
R13. Ein großer Vorteil des Computers liegt in seiner Stärke bei graphischen Darstellungen	63	28,3	0	4,3	4,3
R14. Ein großer Vorteil des Computers liegt in seiner Stärke bei Problemlöseaufgaben	0	8,7	34,8	37	19,6

Die relativen Häufigkeiten sind in Prozent angegeben.

Die Schülerinnen und Schüler machen zu einem großen Teil deutlich, dass der Einsatz des Computers nicht damit einhergeht, nicht mehr über die Verwendung von Formeln nachzudenken (R2: 13.67) bzw. das Verständnis der Mathematik erschwert (R7: 20.59). Ebenso geben viele Schülerinnen und Schüler ihrer Einschätzung Ausdruck, dass sie durch den

Umgang mit dem Computer nicht von mathematischen Problemen abgelenkt werden (R8: 22.61) bzw. dass sie Schwierigkeiten haben, ohne Computer Aufgaben zu lösen (R4: 17.72). Knapp ein Drittel der Schülerinnen und Schüler stimmt der Behauptung nicht oder nur teilweise zu, dass der Unterricht durch den Computereinsatz interessanter geworden ist (R1: 54.30). Trotzdem äußern sich nur 15% gegen eine Fortsetzung des Computereinsatzes im Mathematikunterricht (R11: 65.15) und gut zwei Drittel möchten weiterhin mit dem Computer arbeiten. Dabei unterscheidet sich das Antwortverhalten zwischen Jungen und Mädchen nur sehr gering.

Bemerkenswert ist, dass die in Kapitel 4 geäußerte Befürchtung, die Schülerinnen und Schüler könnten sich zu sehr vom Computer abhängig machen, durch die Einschätzung der Schülerinnen und Schüler widerlegt wird (R10: 67.13). Dies wird ebenfalls durch Beobachtungen im Unterricht bestätigt.

Vorteile des Computereinsatzes sehen die Schülerinnen und Schüler bei Rechenaufgaben (R12: 70.2) und bei graphischen Darstellungen (R13: 91.8). Bei Problemlöseaufgaben sehen nur knapp 10% der Schülerinnen und Schüler Vorteile im Einsatz des Computers (R14: 9.57). Das ist insofern erklärbar, da Problemlöseaufgaben als Aufgaben beschrieben wurden, die im Wesentlichen durch „Denken" bearbeitbar sind. Denken ist aber eine Tätigkeit, die offenbar nicht dem Computer zugesprochen wird, sondern weiterhin als eine Domäne des Menschen verstanden wird. Die Zustimmungen zu den anderen beiden Aspekten unterstreichen die in Abschnitt 4.3 beschriebenen Rechen- und Visualisierungskompetenzen des Computers. Daraus lässt sich folgern, dass die Schülerinnen und Schüler sich die didaktischen Prinzipien zur Bearbeitung der Probleme und Kernideen zu Nutze gemacht haben. Die positive Bewertung des Computereinsatzes und die Analyse der Forschungshefte machen zudem deutlich, dass die Möglichkeiten des Computers nicht nur gesehen, sondern auch schon erfolgreich realisiert wurden.

So lässt sich zusammenfassen, dass das Konzept von KLIP hinsichtlich des Computereinsatzes von den Schülerinnen und Schülern, unabhängig vom Geschlecht, in der Regel positiv aufgenommen und erfolgreich umgesetzt wurde. Wie schon in den Forschungsheften zu beobachten war, gehen die Schülerinnen und Schüler dabei effektiv aber zurückhaltend mit dem Computer um. Die Kalkülfähigkeiten leiden, nach Einschätzung der Schülerinnen und Schüler, nicht unter dem Computereinsatz. Im Bereich der Rechen- und Visualisierungsfertigkeiten werden dem Computer die größten Vorteile zugesprochen.

12.6 Der Werkstattunterricht

Die zentrale Forschungsfrage zum Werkstattunterricht ist:

1. Wie beurteilen die Schülerinnen und Schüler den Werkstattunterricht hinsichtlich der affektiven, kognitiven und sozialen Dimension der Wissenskonstruktion?

Der Fragebogen zum Werkstattunterricht wurden unter verschiedenen Gesichtspunkten entwickelt, unter die sich die einzelnen Fragen subsumieren lassen.

Unter dem Aspekt *Eigentätigkeit und Selbstständigkeit* (1) wurden die Fragen subsumiert, die sowohl positiv die Autonomie der Schülerinnen und Schüler, als auch negativ den Verlust von Heteronomie durch die Lehrerin thematisieren. Spezielle Aufmerksamkeit wird der Unterkategorie des *Erfindens* (1a) gewidmet. Darunter werden alle Prozesse verstanden, die durch eigentätige Generierung von Begriffen und Fachsprache beschrieben werden können. Durch den zweiten Aspekt wird das *Anforderungsniveau* (2) problematisiert. Damit sind sowohl die aus den Intentionalen Probleme entstehenden Kernideen als auch die Anstrengung, die zur Bewältigung der Herausforderungen durch die Kernideen und entsprechenden Perturbationen aufgebracht werden müssen, gemeint. Eng damit im Zusammenhang steht die *Effektivität* (3) des Werkstattunterrichts, einerseits die Effektivität hinsichtlich des Lernprozesses, andererseits die Effektivität hinsichtlich der zu erwartenden Bewertung. Der Aspekt *Soziales* (4) beinhaltet alle Fragestellungen unter sozialen Gesichtpunkten, das betrifft zum Beispiel die Atmosphäre innerhalb des Kursverbands. Die letzten beiden Aspekte thematisieren das *Selbstkonzept* (5) der Schülerinnen und Schüler und deren *Interesse* (6) am Mathematikunterricht. Die Aspekte lassen sich aufgrund der Wechselwirkungen zwischen Affekten und Kognition nicht trennscharf den drei Dimensionen zuordnen. Die vorgenommene Aufteilung in Aspekte scheint hinsichtlich besserer Differenzierungsmöglichkeiten dennoch ein geeigneteres Vorgehen als eine Diskriminierung in die drei Dimensionen.

Eine Faktorenanalyse, analog zu dem in Abschnitt 12.1.2 beschriebenen Vorgehen bestätigte die semantische Homogenität der Fragen. Die repräsentativen Fragen werden auf Grundlage ihrer relativen Häufigkeiten unter Zuordnung zu den Aspekten eingehender diskutiert.

Tabelle 12-16. Relative Häufigkeiten zum Werkstattunterricht

Fragen zum Werkstattunterricht	stimmt genau	stimmt größtenteils	unentschieden	stimmt nur teilweise	stimmt gar nicht
W1. Im Werkstattunterricht kann man konzentrierter und effektiver als im üblichen Unterricht arbeiten.	9,1	31,8	27,3	28,8	3,0
W2. Im Werkstattunterricht wird die Mathematik anspruchsvoller als im üblichen Unterricht.	16,7	39,4	24,2	15,2	4,5
W3. Im Werkstattunterricht kann man selbstständiger als im üblichen Unterricht arbeiten.	36,4	45,5	12,1	4,5	1,5
W4. Im Werkstattunterricht kann man sein Lerntempo selbst bestimmen.	16,7	33,3	25,8	18,2	6,1
W5. Im Werkstattunterricht kann man Mathematik erfinden.	15,2	27,3	21,2	15,2	9,1
W6. Der Werkstattunterricht trägt zu einer angenehmeren Lernatmosphäre bei, als es im üblichen Unterricht möglich ist.	33,3	40,9	13,6	6,1	6,1
W7. Im Werkstattunterricht kann ich im Rahmen der Aufgabenstellungen selbst bestimmen, was ich bearbeiten möchte.	10,6	31,8	39,4	15,2	3,0
W8. Im Werkstattunterricht lässt sich eine individuelle Fachsprache entwickeln.	15,2	31,8	16,7	28,8	7,6
W9. Im Werkstattunterricht muss man selbst erkennen, was wahr und was falsch ist.	24,2	48,5	19,7	6,1	1,5
W10. Der Werkstattunterricht ist anstrengender als der übliche Unterricht.	10,6	19,7	40,9	18,2	10,6
Die Arbeit im Werkstattunterricht finde ich nicht gut,					
W11. da meine Konzentration durch die Diskussionen anderer SchülerInnen gestört wird.	6,1	9,1	22,7	36,4	25,8
W12. da der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben mich überfordert.	4,5	15,2	18,2	4,5	27,3
W13. da die Lehrperson mir nicht direkt sagt, was ich falsch mache.	12,1	9,1	15,2	45,5	18,2
W14. die Gruppen leistungsmäßig zu sehr gemischt sind.	13,6	9,1	16,7	30,3	30,3

W15. da es nicht mehr möglich ist, durch die Lösung von Rechenaufgaben in Mathematik eine gute Note zu bekommen.	6,1	4,5	21,2	28,8	39,4
W16. da die Mathematik schwieriger geworden ist.	3,0	9,1	22,7	39,4	25,8
W17. da meine Meldungen im Unterricht weniger Einfluss auf meine mündliche Note haben.	4,5	15,2	16,7	28,8	34,8
W18. da ich stärker gefordert bin, selbstständig zu arbeiten.	1,5	12,1	21,2	28,8	36,4
W19. weil ich nicht mehr weiß, was falsch und was richtig ist.	6,1	30,3	15,2	22,7	25,8
W20. weil die guten SchülerInnen noch besser und die nicht so guten SchülerInnen noch schlechter werden.	6,1	13,6	16,7	21,2	42,4
W21. weil ich erkenne, dass ich viele Wissenslücken habe.	1,5	18,2	19,7	27,3	33,3
W22. da ich mehr denken muss.	0	6,1	19,7	27,3	47,0
Die Arbeit im Werkstattunterricht finde ich gut,					
W23. da ich mit anderen SchülerInnen zusammenarbeiten kann.	30,3	37,9	19,7	4,5	7,6
W24. da ich mein Lerntempo selbst bestimmen kann.	16,7	34,8	21,2	24,2	3,0
W25. da ich die für mich interessanten Fragestellungen und Aufgaben selbst aussuchen kann.	21,2	36,4	18,2	19,7	4,5
W26. da ich Mathematik selbst erfinden kann.	6,1	24,2	28,8	25,8	15,2
W27. da ich seither den Mathematikunterricht viel interessanter finde.	15,2	24,2	21,2	22,7	16,7
W28. da die Mathematik anspruchsvoller geworden ist.	4,5	21,2	34,8	30,3	9,1
W29. da die Mathematik verständlicher geworden ist.	9,1	30,3	25,8	19,7	15,2
W30. da die Problemstellungen realitätsnäher geworden sind.	34,8	47,0	9,1	7,6	1,5
W31. weil der Unterricht mehr Spaß macht.	19,7	50,0	13,6	13,6	3,0
W32. weil ich eine eigene Fachsprache entwickeln kann.	3,0	9,1	40,9	28,8	18,2
W33. weil ich mich in meiner Arbeit ernst genommen fühle.	7,6	22,7	37,9	24,2	7,6
W34. weil die Lehrperson mir im persönlichen Gespräch besser helfen kann.	13,6	40,9	24,2	18,2	3,0
W35. weil der Unterricht nicht so anstrengend ist.	9,1	18,2	30,3	30,3	12,1
W36. weil ich einen Großteil der Zeit intensiv arbeiten kann.	6,1	22,7	40,9	25,8	4,5
W37. weil meine Bedürfnisse mehr berücksichtigt werden.	4,5	25,8	28,8	28,8	12,1
W38. weil ich den anderen SchülerInnen „dumme“ Fragen stellen kann, ohne dafür eine schlechte Note fürchten zu müssen.	18,2	28,8	24,2	18,2	10,6
W39. weil ich der Lehrperson „dumme“ Fragen stellen kann, ohne dafür eine schlechte Note fürchten zu müssen.	15,2	24,2	22,7	22,7	15,2
W40. weil ich auf meine Wissenslücken aufmerksam werde.	19,7	50,0	15,2	10,6	4,5
W41. weil ich die Lernatmosphäre gut finde.	31,8	34,8	21,2	7,6	4,5
W42. weil der Unterricht abwechslungsreicher geworden ist.	25,8	39,4	13,6	21,2	0

W43. weil der Zusammenhalt im Kurs mehr gefördert wird.	21,2	33,3	21,2	16,7	7,6
W44. Der Werkstattunterricht gefällt mir besser als die Unterrichtsformen, die ich bislang kennen gelernt habe	19,7	30,3	19,7	21,2	9,1
W45. Der Werkstattunterricht sollte sich mit anderen Unterrichtsformen abwechseln.	34,8	27,3	18,2	15,2	4,5
W46. Das selbstständige Arbeiten fällt mir schwer.	4,5	9,1	22,7	47,0	16,7
W47. Durch die Art des Unterrichts habe ich das Gefühl besser Mathematik zu können, als ich zuvor angenommen habe.	4,5	7,6	22,7	30,3	34,8
W48. Durch die Art des Unterrichts habe ich das Gefühl schlechter Mathematik zu können, als ich zuvor angenommen habe.	7,6	15,2	24,2	28,8	24,2
W49. Das selbstständige Arbeiten war am Anfang schwierig, es ist mittlerweile aber einfacher geworden.	15,2	42,4	10,6	18,2	13,6

Die relativen Häufigkeiten sind in Prozent angegeben.

Die Schülerinnen und Schüler bewerten den Werkstattunterricht insgesamt positiv (W44: 50.30). Sie nehmen seine Auswirkungen auf den Aspekt der *Selbstständigkeit* (1) deutlich wahr (W3: 82.6; W4; W7; W8; W9: 72.8). Dabei werden die Vorteile, die der Werkstattunterricht hinsichtlich dieses Aspektes bietet, zum größten Teil befürwortet (W18; W24; W25). So beurteilen die Schülerinnen und Schüler die Anforderungen zum selbstständigen Arbeiten nicht ablehnend (W18: 14.65). Auch Freiheiten, wie die freie Wahl interessanter Fragestellungen, werden durchaus positiv gesehen (W25: 58.24). Bemerkenswert ist der Zusammenhang zwischen den Fragen 13 und 19. Die Schülerinnen und Schüler empfinden den Werkstattunterricht als nicht nachteilig, wenn ihnen die Lehrperson nicht mehr direkt sagen kann, was wahr und was falsch ist (W13: 21.64). Unabhängig von der Lehrperson scheint sich jedoch ein etwas größeres Unbehagen einzustellen (W19: 36.49). Dies kann mit dem Wort „direkt" in W13 zusammenhängen, es kann aber auch auf andere wichtige Orientierungspunkte hinweisen, wie zum Beispiel fehlende Verfügbarkeit von Schulbüchern (vgl. Abschnitt 12.2). Zugleich scheint sich das Verhältnis Lehrende zu Lernenden positiv verändert zu haben. Denn, obwohl die Lehrperson nicht mehr direkt sagt, was wahr oder was falsch ist, schätzen die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit im persönlichen Gespräch Hilfestellungen von ihr zu bekommen (W34: 55.21).

Nur wenige Schülerinnen und Schüler haben das Gefühl, dass das selbstständige Arbeiten ihnen Mühe bereitet (W46: 14.64), was jedoch zu Beginn der Unterrichtsreihe in diesem klaren Verhältnis (W49: 58.32) nicht gesagt werden konnte. Bezieht man diese dokumentierte Steigerung an Selbstständigkeit mit in die Überlegungen ein, so deutet das Antwortverhalten der Schülerinnen und Schüler auf die gerade genannten Fragen auf einen Anstieg von Selbstständigkeit und Unabhängigkeit bei gleichzeitiger Veränderung des Rollenverhältnisses von Lehrenden und Lernenden hin. Die lenkende, normdefinierende Lehrperson weicht der aufmerksamen beratenden Lehrperson. Dieses Verhältnis wird noch deutlicher, wenn man die relativen Häufigkeiten ohne Berücksichtigung des Kurses LKUO bestimmt. Die Befürwortung von W3 steigt auf knapp 90% und von W34 auf knapp 60%. Das könnte darauf zurückzuführen sein, dass in diesem Kurs die Lehrperson sich „gänzlich zurückgehalten" (zit. aus dem Forschungsheft der Lehrperson) hat. Hier wird deutlich, dass die Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler nicht durch ein „Nichtvorhandensein" der Lehrperson gefördert werden kann, denn dann würde auch Schule nicht benötigt. Vielmehr lässt sich unter der Autonomie der Schülerin bzw. des Schülers die Loslösung von der Heteronomie durch die Lehrperson verstehen, wodurch die Schülerin bzw. der Schüler eine kompetente Beraterin bzw. einen kompetenten Berater gewinnt, die bzw. der ihr auch in Notsituationen, z.B. beim Auftreten von epistemologischen Hindernissen, die Hand reichen kann. Hinsichtlich der Exploration dieses vermuteten Zusammenhangs besteht noch Forschungsbedarf.

Nach dieser Interpretation des Antwortverhaltens der Schülerinnen und Schüler wäre KLIP hinsichtlich der Förderung der Selbstständigkeit und der Konstituierung eines neuen Lehrer- und Lehrerinnenbildes seinen gesteckten Zielen erfolgreich nachgekommen.

Der Aspekt des *Erfindens* (1a) von Mathematik tritt in den Augen der Schülerinnen und Schüler nicht so deutlich wie der erste Aspekt hervor (W5: 42.24; W8: 47.36). Das verändert sich jedoch um durchschnittlich 10% zu Gunsten der befürwortenden Antworten, wenn man die Kurse LKUO und GKUC1, die nicht bis zur Begriffsbildung gelangt sind, unberücksichtigt lässt. Das ist nicht überraschend, da Schüler und Schülerinnen ohne vollzogene Begriffsbildung diese auch nicht beurteilen kann. Aus diesem Grund wird der Aspekt des Erfindens ohne Berücksichtigung dieser Kurse diskutiert.[171]

Ein großer Teil der Schülerinnen und Schüler nimmt diesen Aspekt als Teil des Werkstattunterrichts wahr (W5: 53.25 ;W8: 56.20), aber weniger Schülerinnen und Schüler befürworten in Anbetracht der Möglichkeit des Erfindens von Mathematik diese Unterrichtsform (W26: 37.37). Hinsichtlich der Entwicklung einer individuellen Fachsprache sind es sogar weniger befürwortende als ablehnende Stimmen (W32: 17.34). Von den 37% der Frage W26 zustimmenden Antworten sind zudem 75% aus nur einem Kurs (LKUC), wohingegen aus diesem Kurs keine Schülerin der Frage W32 zugestimmt hat. Berücksichtigt man, dass der Kurs LKUC in seiner Begriffsbildung deutlich weiter als die anderen Kurse vorangekommen ist, so lässt sich die Häufigkeitsverteilung zu W26 mit derselben Begründung erklären, wegen der die Kurse LKUO und GKUC1 gerade ausgeschlossen wurden. Das Abstimmungsverhalten zu Frage W32 hingegen lässt sich möglicherweise mit dem Konzept der dritten Phase der Begriffsbildung erklären (vgl. Abschnitt 1.4). In dieser Phase werden die erfundenen Begriffe im Kursverband mit dem Ziel einer gemeinsamen Kurssprache ausgehandelt. Dies bedeutet für viele Schülerinnen und Schüler den Verlust der von ihnen erfundenen Begriffsnamen, so dass, wie in der Auswertung der Forschungshefte schon anklang, die Erfindung der Begriffe und nicht deren Namensgebung im Vordergrund zu stehen scheint.

Mit Blick auf alle Schülerinnen und Schüler lässt sich somit sagen, dass das Erfinden von Begriffen als positiver Aspekt des Werkstattunterrichts nicht abgelehnt wird, aber er ist anderen Aspekten deutlich nachgeordnet.

Der nächste zu untersuchende Aspekt ist der des *Anforderungsniveaus* (2). Ein Großteil der Schülerinnen und Schüler empfindet den Werkstattunterricht als anspruchsvoller als den üblichen Unterricht. Das bedeutet für sie jedoch keine Ablehnung der Unterrichtsform (W16: 12.65), aber auch keinen Grund zur Zustimmung (W28: 25.40). Bemerkenswert ist der Zusammenhang dieser beiden Fragen mit der Frage W29. Dort äußert sich kein geringer Teil der Schülerinnen und Schüler dahingehend, dass die Mathematik (W29: 39.35) verständlicher geworden ist. Da das Antwortverhalten zu den Fragen W29 und W16 keine Korrelation (-0,095) aufweist, lässt sich dies so deuten, dass unter den Schülern und Schülerinnen, die die Mathematik verständlicher erleben, sich sowohl Schülerinnen und Schüler befinden, die diesen Unterricht als anspruchsvoller, als auch Schülerinnen, die diesen Unterricht als nicht anspruchsvoller empfinden.

[171] Die nachfolgenden Daten wurden für diese Teilpopulation zusätzlich erstellt.

Zieht man das Antwortverhalten zur Frage W20 (20.63) hinzu und berücksichtigt, dass auch hier keine relevanten Korrelationen mit den anderen Fragen vorliegen, zeigt sich ein interessantes Ergebnis hinsichtlich der Frage, ob der Werkstattunterricht in Verbindung mit den Intentionalen Problemen sowohl für Grund-, als auch für Leistungskurse geeignet ist. Der Werkstattunterricht scheint für beide Kursarten gleichermaßen geeignet zu sein. Damit kann die Hypothese, dass das KLIP-Konzept und die Intentionalen Probleme unabhängig von der Kursart geeignet sind, nicht abgelehnt werden. Denn das Anforderungsniveau wird nicht vorrangig durch die Intentionalen Probleme, sondern durch die Kernschemata der Schülerinnen und Schüler und den Abstraktionsgrad der individuell vorgenommenen Verallgemeinerungen bestimmt. Dies wird noch durch die Einschätzung seitens der Schülerinnen und Schüler unterstützt, dass das gestiegene Anforderungsniveau nicht zu einem größeren Leistungsgefälle führt (W20: 21.64).

Eng im Zusammenhang mit dem Anforderungsniveau steht die *Effektivität* (3) dieser Unterrichtsform. Die Effektivität lässt sich durch Leistungsmessung und durch die Beobachtung des Begriffsbildungsprozesses einschätzen. Dies ist in den letzten beiden Kapiteln eingehend diskutiert worden. Effektivität kann jedoch ebenfalls von dem jeweiligen Individuum selbst beurteilt werden.[172] Denn die Lernende weiß natürlich am Besten, *was* und *wie gut* sie einen Begriff oder einen Sachverhalt gelernt und verstanden hat. In Hinblick auf die Intentionalen Probleme ist die Effektivität aus Schüler- und Schülerinnensicht in Abschnitt 12.4 analysiert worden und soll hier nicht weiter diskutiert werden. Im sonstigen Werkstattunterricht zeigt sich Effektivität als Intensität von Konzentration, die die Lernumgebung den Schülerinnen und Schüler gestattet. Diese schätzt die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler als hinreichend ein (W1: 41.31). Auch fühlen sich nur wenige Schülerinnen und Schüler im Unterricht durch andere Schülerinnen und Schüler gestört (W11: 15.62).

Bezüglich der Notenerwartung, die ebenfalls als Teil der Effektivität des Unterrichts gesehen werden kann, könnte man annehmen, dass viele Schülerinnen und Schüler befürchten, aufgrund fehlender Möglichkeiten, sich am Unterricht zu beteiligen, nicht mehr die erwartete „gute" Note zu bekommen. Diese Sichtweise teilen jedoch nur 20% der Schülerinnen und Schüler (W15: 20.64). Die Möglichkeit, anderen Schülerinnen und Schülern „dumme" Fragen zu stellen, ohne dass dies eine schlechte Note zur Folge hätte, wird von 47% der Schülerinnen und Schüler geschätzt (W38: 47.29).

Die Effektivität des Werkstattunterrichts scheint demgemäß für die meisten Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der Arbeitsintensität besser und hinsichtlich der Notenerwartung nicht schlechter als der übliche Unterricht eingeschätzt zu werden.

Die Lernatmosphäre als Teil des *sozialen* Aspektes (4) beurteilen viele Schülerinnen und Schüler als angenehm (W6: 74.12). Mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler empfinden sogar Vorteile für den Zusammenhalt innerhalb des Kurses (W43: 54.25). Als Vorteil des Werkstattunterrichts sehen 68% die Zusammenarbeit mit anderen Schülerinnen und Schülern (W23: 68.12). So lässt sich sagen, dass insbesondere die Sozialformen, die gemeinsames und solidarisches Arbeiten fördern, von den Schülerinnen und Schülern sehr positiv aufgenommen werden. Dabei zeigen sich tendenziell etwas positivere Beurteilungen im Antwortverhalten auf Seiten der Jungen. Dies war nach dem Stand der Forschung (vgl. Kapitel 5) nicht unbedingt zu erwarten und ist in Hinblick auf Jungenförderung durch KLIP als Erfolg zu bewerten.

Vom *Selbstkonzept* (5) der Schülerinnen und Schüler wird in diesen Fragen die Einschätzung der eigenen mathematischen Fähigkeiten und der Berücksichtigung der individuellen Be-

[172] Vgl. dazu auch Abschnitt 3.3.

dürfnisse abgefragt. Durch KLIP haben 12% der Schülerinnen und Schüler das Gefühl besser Mathematik zu können als sie zuvor angenommen haben. Doppelt so viele Schülerinnen und Schüler haben das Gefühl schlechter Mathematik zu können. Das ist in beiden Fällen kein großer Anteil der Schüler und Schülerinnen. Und, obwohl das Verständnis bei vielen Schülerinnen und Schülern besser geworden ist, war ein solches Verhältnis zu erwarten. Denn es werden vermutlich insbesondere die Schülerinnen und Schüler die Einschätzung besitzen, Mathematik schlechter zu beherrschen, die bislang durch Kalkülaufgaben ihre Erfolge erzielt haben.

Die Erkenntnis, Mathematik nicht so gut wie zuvor angenommen zu können, ist für viele dieser Schülerinnen und Schüler kein Grund die Unterrichtsform abzulehnen. Im Gegenteil, 85% dieser Schülerinnen und Schüler und 70% aller Schülerinnen und Schüler befürworten den Werkstattunterricht, weil sie auf ihre Wissenslücken aufmerksam werden (W40: 70.15). Das ist besonders erfreulich, da ein Ziel von KLIP ein konstruktiver Umgang mit Fehlern ist (vgl. Abschnitt 1.2). Die jeweiligen Ergebnisse im Kurs LKUC unterstreichen diese Behauptung noch einmal: 31% der Schülerinnen und Schüler haben das Gefühl schlechter Mathematik zu können als zuvor angenommen, und 88% der Schülerinnen und Schüler schätzen den Werkstattunterricht hinsichtlich der Möglichkeit, auf seine Wissenslücken aufmerksam zu werden, positiv ein.

Die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler werden hingegen bei vielen Schülerinnen und Schülern nicht mehr als bisher berücksichtigt (W38: 30.41). Ebenso fühlen sich nur 30% der Schülerinnen und Schüler in ihrer Arbeit ernst genommen (W33: 30.32). In Anbetracht der Antworten zu den anderen Fragen wird nicht deutlich, welche Bedürfnisse durch den Werkstattunterricht nicht berücksichtigt werden, da alle Einzelaspekte, Problemstellungen, Computereinsatz, Sozialformen u.a. von den Schülerinnen und Schülern deutlich positiver eingeschätzt werden. Hier bietet sich an, mit den Schülerinnen und Schülern in Interviews deren Bedürfnislage zu explorieren. Es kann vermutet werden, dass die Schülerinnen und Schüler den Bedürfnisbegriff so weit fassen, dass ihre Bedürfnisse durch den Mathematikunterricht oder durch Schule überhaupt nicht befriedigt werden können. Die Einschätzungen zu Frage W33 differieren von Kurs zu Kurs sehr stark, so dass angenommen werden kann, dass die Antwort dieser Frage durch andere Einflussfaktoren, wie z.B. Lehrpersonenverhalten, bestimmt und somit in dieser Arbeit nicht weiter untersucht wird.

Der *Interessenaspekt* (6) wird in diesem Fragebogen in Spaß und Interesse differenziert. Der Mathematikunterricht ist für 39% der Schülerinnen und Schüler interessanter (W27: 39.39) und sogar für 70% macht der Unterricht mehr Spaß als der übliche Unterricht (W31: 70.17). Dabei ist für alle Schülerinnen und Schüler, die mehr Interesse zeigen, auch der Unterricht „spaßiger“. Daraus lässt sich folgern, dass der Spaß nicht nur aus den Inhalten des Mathematikunterrichts gewonnen wird, auf die sich vermutlich vorrangig das Interesse bezieht. Aufgrund des Antwortverhaltens zum vierten Aspektes, lassen sich in diesem Bereich mögliche Prädiktoren hierfür vermuten.

Viele Schülerinnen und Schüler halten die Realitätsnähe der Problemstellungen (W30: 82.9) und den Abwechslungsreichtum des Unterrichts (W42: 65.21) für einen Vorteil des Unterrichts. Vergleicht man dieses Antwortverhalten mit dem zur Interessenbekundung (W27) ist es erstaunlich, dass nur 39% den Unterricht interessanter finden. Berücksichtigt man nur den Kurs LKUC, der in der Begriffsbildung am Weitesteten vorangekommen ist, so schätzen dort 69% der Schülerinnen und Schüler den Unterricht interessanter als den gewohnten Unterricht ein. Hier deutet sich, wie schon oben dargelegt, dass mit einer größeren Erfahrung mit den Strukturen von KLIP die Einschätzung positiver und der Lern-erfolg größer wird. Insgesamt lässt sich somit auch hinsichtlich des Interesses der Schülerinnen und Schüler am Mathematikunterricht von einem Gelingen des Unterrichtsversuches aus Sicht der Schülerinnen und Schüler sprechen.

Ordnet man die Ergebnisse hinsichtlich der einzelnen Aspekt den Dimensionen zu, so wird der soziale Aspekt von KLIP am stärksten positiv bewertet. Die Verbesserung der Lernatmosphäre und die Zusammenarbeit mit anderen Schülerinnen und Schülern und der Lehrperson scheinen wichtige Einflussfaktoren auf das Wohlbefinden der Schülerinnen und Schüler zu sein.

Aber auch die affektive Dimension ist insbesondere hinsichtlich des Spaßes an Mathematik von großer Bedeutung. Das Interesse am Mathematikunterricht und die Einschätzung, ernst genommen zu werden, d.h. dass auch die individuellen Bedürfnisse berücksichtigt werden, werden nur sekundär als wichtig empfunden.

Hinsichtlich der kognitiven Dimension ist zu bemerken, dass der Umgang mit Fehlern zum Lernprozess beiträgt, bei dem die Möglichkeit zum selbstständigen Handeln und Arbeiten von den Schülerinnen und Schülern als wichtig eingeschätzt wird. Die Gestaltung eigener mathematischer Theorien wird hingegen nur von den Schülerinnen und Schülern befürwortet, die sich in diesem Bereich ausgiebig engagiert haben.

Der Werkstattunterricht wird somit von den meisten Schülerinnen und Schülern positiv beurteilt.

KAPITEL XIII

13 Resümee und Perspektiven

Wenn man annimmt, dass der Aufbau von Verständnis eines Sachverhaltes sich nicht im Sachverhalt, sondern im Individuum, das den Sachverhalt verstehen will, vollzieht, wird erkennbar, dass die Entstehung von Wissen durch die kognitive und affektive Struktur des Individuums bedingt ist. Postuliert man zudem die objektive Unerkennbarkeit der Welt, werden die Sachverhalte und damit der Entwicklungsprozess von Wissen über diese Sachverhalte individuell. Lernen kann somit als ein selbstbestimmter und konstruktiver Prozess verstanden werden. Diese Annahme bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, inwieweit Schule dazu beitragen kann, diese Form der Wissensgenerierung zu fördern. Ein erster Schritt dahin liegt in einem Perspektivwechsel von Stofforientierung zur Schüler- und Schülerinnenorientierung. Dies erfordert ein verändertes Verständnis von Lehren und Lernen. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wurde ein theoretisches Modell entworfen, das sich als tragfähiges Fundament für die Gestaltung von Lernarrangements zur Förderung von konstruktivem und selbstbestimmtem Lernen innerhalb von Schule eignet. Daran anschließend wurde dieses theoretische Konzept in seiner Anwendung und seinen praktischen Implikationen im Rahmen des Mathematikunterrichts der gymnasialen Oberstufe untersucht. Die Güte und Viabilität des Konzeptes hat sich in der empirischen Analyse gezeigt, womit sich der dritte Teil dieser Arbeit beschäftigt.

Auf Grundlage der Annahme, dass Mathematik ein Denken in Begriffen ist und diese Begriffe nur aus der Erfahrung im Umgang mit für das Subjekt relevanten Problemen individuell entwickelt werden können, sollte in dieser Arbeit die Frage beantwortet werden, inwieweit eine in diesem Sinne konstruktivistische Begriffsbildung möglich ist.

Inwieweit dies gelungen ist, wird entlang der erkenntnisleitenden Forschungsfragen dieser Arbeit abschließend erörtert.

(1a) Ist Begriffsbildung in einem konstruktivistisch orientierten Unterrichtskonzept, wie es KLIP darstellt, derart möglich, dass sie den Anforderungen von Schule genügt?

Vor dem Hintergrund der aktuellen segmentierenden Didaktik und den Einschätzungen vieler Lehrer und Lehrerinnen konnte erwartet werden, dass die Schülerinnen und Schüler weder die Motivation noch die Fähigkeiten aufbringen, selbsttätig, eigenverantwortlich und konstruktiv mathematische Theoriebildung voranzutreiben. Die Untersuchung der Forschungshefte und die Analyse des Abschlusstests haben jedoch gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler bei geeigneter Gestaltung der Lernumgebung in der Lage sind mathematische Begriffe selbsttätig zu konstruieren bzw. zu erfinden. Auf Grundlage von Intentionalen

Problemen formulierten sie eigenständig Forschungsfragen, die sie in Gruppen gemeinsam bearbeiteten und lösten. Die konkreten Lösungen und entwickelten Verfahren verallgemeinerten sie anschließend in Form einer mathematischen Theorie. Es hat sich gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler ohne Steuerung der Lehrperson motiviert sind, sich intensiv mit Mathematik auseinandersetzen, und dabei kognitive Kompetenzen wie rationales Argumentieren, sprachliche Fähigkeiten, Problemlösefähigkeiten und mathematische Strategien entwickeln und zugleich soziale Kompetenzen wie Teamfähigkeit erlangen können.

Das Erfinden von mathematischen Begriffen wurde dementsprechend von den Schülerinnen und Schülern als einer der größten Vorteile des Unterrichts bewertet. Hierbei steht jedoch nicht die Repräsentationsebene des Begriffsnamens im Vordergrund, sondern die motorische und visuelle Vorstellung des Begriffs. Diese erweist sich als entscheidend für die Generierung und Stabilisierung des Begriffs.

Der Zugang über die Intentionalen Probleme zeigt sich hinsichtlich einer Leistungsdifferenzierung als besonders wirksam, da der Schwierigkeitsgrad der Mathematik von den Schülern und Schülerinnen individuell definiert wird. Bei einigen Schülern und Schülerinnen hatte dies jedoch zur Folge, dass sie den Problemlöse- und den Begriffsbildungsprozess nicht beendeten. Hier zeigten sich deutliche Unterschiede zwischen den Kursen, die zur Begriffsbildung gelangt sind und denen, die dies nicht leisten konnten. Dabei fiel insbesondere der Leistungskurs der Gesamtschule stark ins Gewicht. Dort war es vielen Schülerinnen und Schülern nicht möglich, die Probleme vollständig zu lösen. Ein Grund hierfür ist möglicherweise im Fehlen des Computers zu sehen. Es ist aber auch denkbar, dass die schon in TIMSS beschriebenen Leistungsunterschiede zwischen Kursen von Gesamtschulen und Gymnasien dafür ursächlich sind. Die Analyse des Tests deutet auf eine Vermengung beider Gründe hin. Hier bietet es sich an, diese durch weitere Forschungstätigkeit zu separieren.

Neben diesen für dieses Verhalten verantwortlichen Determinanten der Leistungsfähigkeit und des Computereinsatzes zeigte sich, dass das Verhalten der Lehrperson und der das Subjekt umgebenden Gruppe bzw. Kurs wichtige Funktionen einnehmen. So lassen sich bessere Erfolge bei den Schülerinnen und Schülern erzielen, wenn die Lehrperson als kompetente Fachfrau bzw. als kompetenter Fachmann beratend zur Verfügung steht, die bzw. der nicht den Lernprozess normativ steuert, sondern durch methodische Hilfestellungen und mit geeigneten fachlichen Perturbationen begleitet. Zudem scheint es Faktoren innerhalb der jeweiligen sozialen Systeme zu geben, die die Bedingungen der Möglichkeiten zur Begriffsbildung beeinflussen. Je höher die Übereinstimmung der durch die Lehrperson intendierten Lernumgebung mit der Einschätzung derselben durch die Lerngruppe ist, desto erfolgreicher ist die Begriffsbildung. Inwieweit sich dieser Zusammenhang auf die einzelne Schülerin bzw. den einzelnen Schüler übertragen lässt und welche Faktoren dafür verantwortlich sind, sollte in Nachfolgeuntersuchungen analysiert werden.

Im Vergleich mit konventionell unterrichteten Schülern und Schülerinnen zeigte sich, dass die konstruktivistische Begriffsbildung im Sinne von KLIP zudem das Verständnis der entwickelten Begriffe und darauf aufbauend Problemlösefähigkeiten im besonderen Maße unterstützt. Die in weiten Teilen des Tests besseren Ergebnisse der KLIP-Schüler und Schülerinnen belegen, dass die Begriffsbildung den curricularen Ansprüchen genügt.

Inhaltlich gehören die entwickelten Begriffe dem anspruchsvollen schulmathematischen Bereich der Integralrechnung an. Die Schülerinnen und Schüler zeigten sich in der Lage, zentrale Ideen, Aspekte, Begriffe und Grundvorstellungen dieses Bereiches zu erfinden, zu formulieren und anzuwenden.

(1b) Welche Begriffe und Aspekte der Integralrechnung wurden von den Schülerinnen und Schülern primär entwickelt?

Die durch Kernideen der Lehrperson in die Probleme intendierten Begriffe konnten von einem Teil der Schülerinnen und Schüler fast vollständig erschlossen werden. Dabei erwiesen sich die beiden Probleme des Geschlechterwachstums und des Fahrtenschreibers besonders wirksam. Sie bildeten die Grundlage für die erfolgreiche Entwicklung verschiedener Begriffe der Integralrechnung, wie die Cauchy-, die Riemann-, die Regel- und die Stammfunktionsintegrierbarkeit. Dabei dominierte deutlich die Cauchy- und die Stammfunktionsintegrierbarkeit.

Die in der Schule üblicherweise verwendeten Funktionenklassen machen eine Thematisierung anderer Integralbegriffe, wie beispielsweise die des Riemann-Integrals, auch nicht notwendig. Es zeigte sich jedoch bei dem Problem des Fahrtenschreibers, dass inhaltliche Argumentationen existieren, die eine Einführung des Riemann-Integrals sinnvoll erscheinen lassen, ebenso wie eine Thematisierung des Regel-Integrals. Angesichts der Verfügbarkeit von CAS ist es zudem denkbar die Funktionenklassen zu erweitern und anhand pathologischer Fälle das Riemann-Integral zu problematisieren. Nicht zuletzt ist der Vergleich von mindestens zwei unterschiedlichen Integralbegriffen für die Begriffsabgrenzung und damit allgemein für die Begriffsentwicklung von großem Nutzen. Insofern plädiere ich auf Grundlage der Ergebnisse dieser Untersuchung in Konzepten wie KLIP für die Verwendung von Problemstellungen, die die Generierung von mehr als einem Integralbegriff erlauben. Damit erweist sich das Konzept einer Vernetzung mehrerer Intentionaler Probleme als Erfolg. In klassischen Unterrichtsumgebungen sollte vorrangig das Cauchy-Integral auf Basis von Riemannsummen thematisiert werden. Es hat sich gezeigt, dass das Verständnis der essentiellen Grundvorstellungen der Integralrechnung, Kumulation und Gesamteffekt, allein auf Basis des Cauchy-Integrals entwickelt werden können. Hinsichtlich der Anknüpfung an Vorwissen, der Vernetzung von Wissen und anwendungsorientierter Interpretationsmöglichkeiten des Integrals sollte dieser Begriff durch das Stammfunktionsintegral ergänzt werden. Eine Erweiterung auf das Riemann- bzw. auf das Regelintegral sollte sich an den Interessen und dem Leistungsstand der Lerngruppe orientieren.

Bei den den Begriffen unterliegenden Aspekten dominierte auch bei den Schülerinnen und Schülern des Unterrichtsversuchs der Flächeninhaltsaspekt. Dies scheint wesentlich in seiner geometrischen Natur begründet zu liegen. Der zweite von den Schülerinnen und Schülern entwickelte Aspekt, der mehr zum Berechnen als zum Begreifen genutzt wurde, ist der Stammfunktionsaspekt. Mit Hilfe dieses Aspektes konnten zwar Bezüge zur Differentialrechnung aufgestellt werden, er verlor jedoch nach Erfindung des Cauchy-Integrals an Bedeutung. Der Approximationsaspekt zeigte sich während des Prozesses der Begriffsbildung insbesondere bei der Fahrtenschreiberaufgabe als viabel. Der Mittelwertaspekt wurde von den KLIP-Schülerinnen und Schülern während der Bearbeitung der Intentionalen Probleme entwickelt und genutzt, so dass einige Schüler und Schülerinnen eine Vorstellung des Regel-Integrals bekamen. Nach der Entwicklung des F-Aspekts traten jedoch beide Aspekte in ihrer Nützlichkeit für das Verständnis des Integralbegriffs hinter diesen zurück. Trotzdem zeigte sich, dass die Kenntnis der verschiedenen Aspekte das Verständnis des F-Aspekts fördert und die Gefahr der Identifikation von Integral und Flächenberechnung deutlich mindert. Darüber hinaus lassen sich die im Vergleichstest gezeigten ausgeprägteren Problemlösefähigkeiten der an KLIP beteiligten Schüler und Schülerinnen auch auf ein Verständnis des Approximations- und des Mittelwertaspekts zurückführen.

Alle Schülerinnen und Schüler entwickelten umfassend die Grundvorstellungen Kumulation und Gesamteffekt. Die Relation von F-Aspekt, Kumulation und A-Aspekt mit der Zielperspektive des Gesamteffekts als motorische Vorstellung des Integralsbegriffs wurde bei den meisten Schülern und Schülerinnen eine zentrale Repräsentation des Integralbegriffs.

Damit lässt sich feststellen, dass die Intentionalen Probleme im besonderen Maße und in einem angemessenen zeitlichen Rahmen dazu geeignet sind, konstruktivistische Begriffsbildung zu initiieren und zu unterstützen, so dass alle zentralen Grundbegriffe und Grundvorstellungen eines Bereiches gut verankert, vernetzt und stabil von den Schülerinnen und Schülern entwickelt werden können. Nach den Prinzipien der konstruktivistischen Begriffsbildung lassen sich aus ihnen neue Begriffe generieren.

Ob diese sehr guten Ergebnisse auf andere Bereiche der Schulmathematik oder allgemeiner auf Inhalte beliebiger Unterrichtsfächer übertragbar sind, muss untersucht werden.

(2) Werden Begriffe stärker sozial oder individuell konstruiert?

Aufgrund des Forschungsstandes und zweier konkurrierender Konstruktivismustheorien, der Radikale und der Soziale Konstruktivismus, konnte zu Beginn dieser Untersuchung nicht gesagt werden, inwieweit Wissenskonstruktionen sozial oder individuell bedingt sind. Im Konzept KLIP wurde ein theoretischer Rahmen bereitgestellt, der beide Möglichkeiten von Wissenskonstruktionen postulierte, wodurch Aufschluss über die Art und Weise und das Verhältnis verschiedener Konstruktionen gewonnen werden sollte.

Die Analyseergebnisse der Forschungshefte haben gezeigt, dass offensichtlich beide Dimensionen in das Lernen einfließen, jedoch mit einer deutlichen Dominanz auf Seiten der sozialen Dimension. Dabei scheinen soziale Konstruktionsprozesse offensichtlich sehr stark von gruppen- und kursinternen Strukturen abzuhängen. Auf Grundlage der vorliegenden Informationen kann den beiden Dimensionen somit eine symmetrische Relation (vgl. COBB & YACKEL, 1996) nicht zugesprochen werden. Innerhalb der Gruppen ist dieses Ungleichgewicht zu Gunsten der sozialen Dimension wesentlich mit der fehlenden Realisierung des in Abschnitt 1.1 entwickelten diskursiven konsenstheoretischen Wahrheitsbegriffs zu begründen. Zwar handelten die Gruppenmitglieder immer wieder Vorgehensweisen, Begriffe und Namen aus, diese Interaktionen schienen aber oft durch hierarchische Strukturen und Affekte bedingt. Eine Analyse von Interaktionsstrukturen innerhalb der Gruppen könnte Aufschluss über die dieses Verhalten bedingenden Faktoren geben. Innerhalb der Kursverbände zeigten sich ebenfalls grundlegende Unterschiede in der Annahme der Lernumgebung und damit im Erfolg der Begriffsbildung, was sich beispielsweise in den guten Testergebnissen der beiden Kurse LKUC und GKUC2 zeigte, die beide die gegebenen Bedingungen der Lernumgebung überwiegend annahmen. Die Ursachen können an dieser Stelle aufgrund des Informationsstandes nicht exploriert werden. Sie sollten in weiteren Untersuchungen jedoch eingehend analysiert werden.

Sollte sich die These bestätigen, dass Wissen vorrangig sozial konstruiert wird, muss die Gestaltung von Lernarrangements noch stärker die Strukturen sozialer Systeme berücksichtigen. Es stellt sich zum Beispiel die Frage, ob sich durch einen Abbau von hierarchischen Strukturen in sozialen Systemen individuelle Konstruktionen fördern lassen? Schwierigkeiten mit der Lernumgebung beispielsweise begründeten einige Schülerinnen und Schüler mit der fehlenden Unterweisung durch die Lehrperson. Zugleich beurteilten sie den Aspekt der Selbstständigkeit und die Zusammenarbeit mit anderen als nachteilig für den Erfolg ihres Lernens. Dies deutet darauf hin, dass nicht nur im Verhältnis Lehrende bzw. Lehrender und Lernende bzw. Lernender Hierarchie durch Kompetenz ersetzt werden muss, sondern das dies gleichermaßen für die Strukturen unter den Schülerinnen und Schülern gelten sollte.

In diesem Zusammenhang ist auch die Funktion der Affekte bedeutsam. Die Affekte erwiesen sich hinsichtlich der Wahl und der Bearbeitung der Intentionalen Problem in ihrer Operatorwirkung auf die Kognition als bedeutsam (vgl. Abschnitt 1.1). Sie bestimmten aber auch, nach Einschätzungen der Schüler und Schülerinnen, die Interaktionen innerhalb der Gruppe und des Kursverbandes, so dass eine Analyse der sozialen Strukturen nicht ohne Berücksichtigung der Affekte durchgeführt werden kann. So ist es beispielsweise interessant, ob das Interesse an einzelnen Fragestellungen und die Beurteilung ihrer Effizienz für die Wissenskonstruktionen sozial oder individuell bedingt sind.

(3) Wie verändert konstruktivistisches Lernen das Interesse und die Freude an der Mathematik?

Das Konzept KLIP wurde in allen Kursen positiv aufgenommen. Die meisten Schüler und Schülerinnen empfanden den Werkstattunterricht als eine Bereicherung des Schulalltags. Besonders hervorgehoben wurden die soziale Dimension des Lernens und die realitätsnahen und interessanten Problemstellungen. Die Anforderung des selbstständigen Arbeitens hat nach Überwindung einiger Anfangsschwierigkeiten die Freude am Mathematikunterricht bei vielen Schülern und Schülerinnen verstärkt. Der Aspekt des Erfindens zeigte sich jedoch nur für die Schülerinnen und Schüler relevant, die zur Begriffsentwicklung gelangten. Von diesen wird die Möglichkeit zur selbsttätigen Theorieentwicklung als einer der größten Vorteile von KLIP beschrieben. Dabei hat sich das Führen des Forschungshefts als interessant und sinnvoll erwiesen. Eine Ausweitung dieser Arbeitsform auf andere Unterrichtsfächer wird von diesen Schülern und Schülerinnen aber nicht befürwortet.

Hier deutet sich eine gewichtige Schwierigkeit in der Verbindung KLIP und Schule in ihrer derzeitigen Ausgestaltung an. KLIP gestattet den Schülern und Schülerinnen eigentätig zu forschen. Das bedeutet aber neben dem kognitiven und affektiven Nutzen auch Mehrarbeit, die bei dem derzeitigen Fächerkanon, Bewertungskriterien und Schulorganisation weder von Schülerinnen und Schülern noch von Lehrerinnen und Lehrern in allen Fächern geleistet werden kann. Eine fruchtbare und langfristige Eingliederung von KLIP in Schule kann somit entweder nur auf wenige Fächer beschränkt bleiben oder erfordert eine generelle Umgestaltung von Schule. Das könnte zum Beispiel heißen, dass verstärkt fächerverbindender Projektunterricht oder Epochenunterricht mit einer deutlich geringeren Anzahl an unterschiedlichen Fächern Einzug in Schule erhält.

(4) Welche Auswirkungen hat Konstruktivistisches Lernen in Form des computerorientierten Werkstattunterrichts auf die Bildungsziele des Mathematikunterrichts?

Aufgrund des Forschungsstandes kann davon ausgegangen werden, dass der Einsatz des Computers von Routinearbeiten entlastet und Veranschaulichungen unterstützt. Dies kann eine Förderung von Problemlösefähigkeiten und einen Verlust von Kalkülfertigkeiten implizieren.

Die Vorteile des Computers hinsichtlich seiner Rechen- und Visualisierungskompetenzen treten in dieser Untersuchung deutlich hervor. Das wurde sowohl durch die Befragung der Schülerinnen und Schüler als auch durch die Analyse der Forschungshefte deutlich. Die Schülerinnen und Schüler nutzten vielfach die durch den Computer bereitgestellte Möglichkeit des Zugriffs auf verschiedene Repräsentationsebenen. Zusätzlich von Routinearbeiten entlastet gelang es den Schülerinnen und Schülern so zentrale Begriffe der Integralrechnung zu entwickeln, wie beispielsweise das Cauchy-Integral. Der Vergleich mit dem Kontrollkurs, der ohne Computer an den Intentionalen Problemen arbeitete, bestätigt den Eindruck, dass der Computer als Bedingung für konstruktivistisches Lernen im Mathematikunterricht sehr bedeutsam ist. Die Beschäftigung mit langwierigen Rechnungen lenkte die Schülerinnen und Schüler dieses Kurses immer wieder von zentralen Gesichtspunkten der Integralrechnung ab.

HENTSCHEL und PRUZINA (vgl. Abschnitt 4.3) nehmen an, dass die Verlagerung von Fertigkeiten zu Fähigkeiten nicht zu einem deutlich höheren Fähigkeitsniveau bei den Schülerinnen und Schülern führt. Der Test in dieser Untersuchung zeigt jedoch das Gegenteil. Die Schülerinnen und Schüler weisen bei den Problemlöse- und Verständnisaufgaben die besseren Ergebnisse auf. Dies lässt sich teils auf den Werkstattunterricht und teils auf den Computereinsatz zurückführen. Eine trennscharfe Separation beider Einflussfaktoren ist aufgrund der Situation des Gesamtschul-Leistungskurses nicht möglich und muss in Nachfolgeuntersuchungen diskutiert werden. Bei den meisten Problemlöseaufgaben wurde jedoch deutlich, dass die KLIP-Grundkurse bessere Ergebnisse erzielten als der Kontrollleistungskurs.

Ein Verlust von Kalkülfertigkeiten oder Nachteile bei schematisch zu lösenden Aufgaben aufgrund des Einsatzes des Computers war bei den KLIP-Schülerinnen und Schülern nicht zu beobachten. Das liegt einerseits in der Skepsis der Schülerinnen und Schüler gegenüber den Ergebnissen des Computers begründet. Andererseits spiegeln sich hier die Methoden des Computereinsatz wider, die zum Ziel haben, nur mit verstandenen Sachverhalten, bzw. hier Modulen, weiter zu arbeiten.

Die in Abschnitt 4.3 angenommenen Nachteile für Schüler und Schülerinnen, die in der affektiven Dimension Vorbehalte gegenüber dem Computereinsatz besaßen, konnten nicht belegt werden. Fast alle Schülerinnen und Schüler sprachen sich für eine Fortführung des Computereinsatzes im Mathematikunterricht aus. So zeigten einige Schüler und Schülerinnen zwar zu Beginn Zurückhaltung im Einsatz des Computers, gewannen mit der Zeit aber immer mehr Vertrauen im Umgang mit dem Computer. Dieses Vertrauen war jedoch niemals so stark, dass die Ergebnisse des Computers nicht durch Plausibilitätsuntersuchungen überprüft wurden. Damit zeigen die Schüler und Schülerinnen einen effektiven und überlegten Umgang mit dem Computer.

Der Computereinsatz erweist sich insbesondere zur Generierung des S-Aspektes unterstützend, was die Auswertung des Tests deutlich macht. Da der S-Aspekt wesentlich die Beziehung von Änderungsrate und Gesamteffekt, dem Ableiten und dem Integrieren thematisiert, ist eine Erklärung in der Rechenkompetenz des Computers zu sehen. Durch die Bereitstellung von Ableitungen und Stammfunktion quasi auf Knopfdruck, können die Schülerinnen und Schüler sich auf die Essenz des Aspektes konzentrieren und werden nicht durch langwierige Rechnungen abgelenkt. Auch bei Aufgaben, die die ikonische Repräsentationsebene ansprechen, erweist sich der Einsatz des Computers als erfolgreich.

Von den in Kapitel 4 beschriebenen Prinzipien des Computereinsatzes sind von den Schülern und Schülerinnen weitgehend die Window-Shuttle-Technik und das fünfte Prinzip der Gerüstdidaktik verwendet worden. Die Black Box/White Box-Methode wurde in erster Linie zur Generierung von Regeln verwendet. Ansonsten dominierte die White Box/Black Box-Methode, wie beispielsweise bei der Programmierung des Grenzwertes der Linkssummen.

In Kapitel 4.2.3 wurde die Visualisierungskompetenz u.a. auch der sozialen Dimension zugesprochen. Dies bestätigte sich im Unterricht, da insbesondere durch Präsentationen und Veranschaulichungen die soziale Begriffsbildung intensiv angeregt wurde.

(5) Lassen sich unterschiedliche Verhaltensweisen bei Mädchen und Jungen hinsichtlich der Begriffsentwicklung, der Leistungen im Test, der Forschungshefte, des Werkstattunterrichts und des Computereinsatzes erkennen?

Eine Zielperspektive dieser Arbeit bestand darin, sozial bedingte Geschlechtszuschreibungen, die zur Benachteiligung von Jungen oder Mädchen führen, zu verändern. Auf Basis der aktuellen Forschung werden diese in unterschiedlichen Leistungen bei Problemlöse- und Verständnisaufgaben gesehen. Während Jungen etwas bessere Leistungen bei Problemlöseaufgaben zeigen, ist im Verstehen von mathematischen Konzepten kein Unterschied erkennbar. Dies kann mit unterschiedlichen kognitiven Strukturen bei Mädchen und Jungen zusammenhängen. Zudem wird angenommen, dass Mädchen hinsichtlich kommunikativer und sozialer Fähigkeiten den Jungen überlegen sind. KLIP wurde so konzipiert, dass mit dem Einsatz von Forschungsheften, des Computers und des Werkstattunterrichts bei beiden Geschlechtern das Interesse für Mathematik und schwächer ausgebildete Fähigkeiten gefördert werden sollten.

Da in dieser Arbeit die soziale Konstruktion von Geschlecht unterstellt wird, welche nicht innerhalb von einem halben Jahr mit drei bis fünf Stunden Mathematikunterricht pro Woche veränderbar ist, wurden für diese Untersuchung nur geringe Veränderungen hinsichtlich der Favorisierung einzelner Aspekte von KLIP angenommen. Es zeigte sich jedoch, dass Jungen und Mädchen den Einsatz des Computers gleichermaßen positiv erfahren. Die Auswertung des Tests ergab, dass die Mädchen deutlich mehr vom Computereinsatz profitieren als die Jungen. Auch hinsichtlich der Forschungshefte sind die Bewertungen ähnlich positiv. Überraschend ist jedoch, dass die Jungen mehr als die Mädchen von den Forschungsheften angesprochen werden, die sich in deren Augen insbesondere aufgrund der Möglichkeit zur Dokumentation der eigenen Forschung auszeichnen, während Mädchen mehr den strukturgegebenen Aspekt als förderlich erleben. Ein Schulbuch, das darüber hinaus hilft, die Ergebnisse strukturiert und vollständig darzustellen, wird dennoch von vielen Schülerinnen und Schülern gewünscht. Ebenfalls bemerkenswert ist die Einschätzung der sozialen Dimension. Die Jungen erleben das gemeinsame und solidarische Arbeiten in Gruppen positiver als die Mädchen. Insofern hat KLIP die Jungen und die Mädchen in Bereichen, in denen sie laut sozialer Konstruktion Nachteile gegenüber dem anderen Geschlecht besitzen, positiv angesprochen und gefördert.

Die Testauswertung bestätigt im Großen und Ganzen den Stand der Forschung: Jungen zeigen bei Problemlöseaufgaben die besseren Leistungen während bei den anderen Aufgabentypen das Leistungsbild sehr ähnlich ist. Ein diese Tendenz und damit den Forschungsstand bestätigendes Phänomen zeigt sich ebenfalls in den Forschungsheften. Dort argumentierten die Mädchen in der Regel stärker prädikativ als die Jungen. Während die Schülerinnen in den von ihnen entwickelten Sätzen und Definitionen sich bemühten, allgemeine Zusammenhänge herzustellen, dokumentierten die Jungen stärker den Prozess der Problemlösung und lehnten ihre Begriffe stark an diesen Prozess an.

Ob diese Zuschreibungen auch bei einem längerem Einsatz von KLIP stabil bleiben, ist eine interessante und offene Frage. Die insgesamt positiven Einschätzungen der Jungen und Mädchen zum Werkstattunterricht geben Anlass zu der Hoffnung, dass das Konzept

KLIP langfristig einen Beitrag zur Veränderung der als nachteilig erlebten Geschlechtszuschreibungen leisten kann.

Schlusswort. In der Rückschau auf die gesamte Arbeit lässt sich feststellen, dass es doch noch Erfinder und Erfinderinnen gibt. Und dies scheint auch kein Beruf für besonders talentierte Menschen zu sein, sondern offensichtlich kann fast jeder und jede erfinden. Benötigt wird eine geeignete Umgebung, in der man arbeiten und erfinden kann, vorausgesetzt, man hat Interesse an den Erfindungen. Da es, wie diese Untersuchung gezeigt hat, viele Erfinder und Erfinderinnen gibt, bietet es sich an, statt wie die Menschen in BICHSELS Geschichte, sich gegenseitig auszulachen, lieber gemeinsam zu erfinden. Und, da stimme ich BICHSEL zu, es ist schwer, Sachen zu erfinden, die es schon gibt. Doch, es macht auch ungeheuren Spaß.

ANHANG

ANHANG A

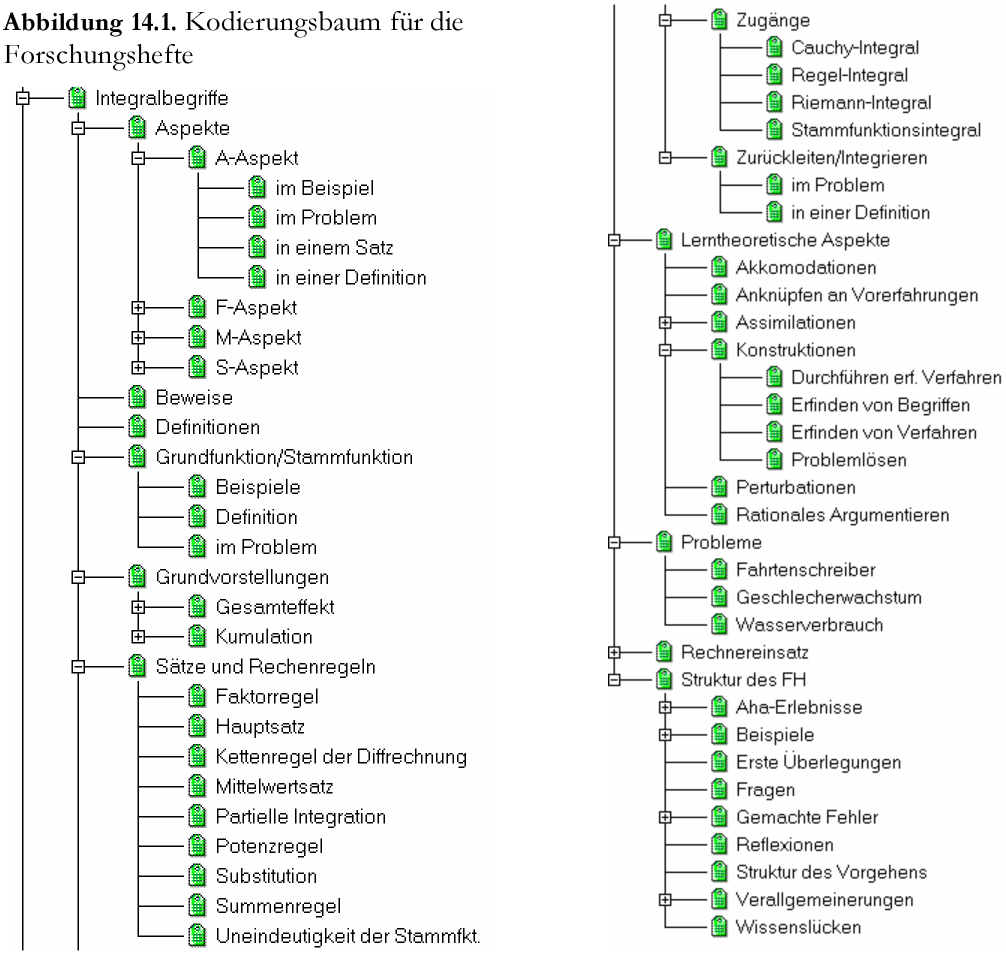
14 Daten zur empirischen Untersuchung der Forschungshefte

Nachfolgend sind alle in der Arbeit nicht aufgeführten Daten zu den Forschungsheften dargestellt. Die Struktur dieses Kapitels orientiert sich an der Struktur des Kapitels 10 dieser Arbeit. So sind an den meisten Tabellen Querverweise zu den Abschnitten, auf die sich das Datenmaterial jeweils bezieht. Dort können auch die Informationen, die zum Verständnis der Daten notwendig sind, nachgelesen werden.

14.1 Kodierungen

Die nachfolgende Abbildung enthält eine Liste aller Kodierungsworte für die Forschungshefte. Auf Grundlage dieser Kodierungsworte wurden die Variablen für die Clusteranalyse in Abschnitt 10.1 erzeugt. Die Verzweigungen des Baumes unterhalb des A-Aspektes sind bei den anderen Aspekten ebenfalls enthalten. Die Grundvorstellungen enthalten

Abbildung 14.1. Kodierungsbaum für die Forschungshefte



dieselben Differenzierungen wie der Aspekt „Stammfunktion/Grundfunktion“. Die Unterpunkte zum „Computereinsatz“ enthalten die in Kapitel4 beschriebenen Funktionen und Methoden des Computereinsatzes.

14.2 Auszüge aus Forschungsheften

Auszug 17 aus FH von g1(1)

10 min. 40km/h = 6 2/3km
5 min. 42km/h = 3 1/2km
12 min. 80km/h = 16 km
18 min. 82km/h = 24 3/5km
15 min. 79km/h = 19 3/4km
9 min. 72km/h =10 4/5km
11 min. 80km/h =14 2/3km
8 min. 52km/h = 6 14/15km
7 min. 40km/h = 4 2/3km
15 min. 50km/h = 12 1/2km
7.5 min. 60km/h = 7 1/2km
7.5 min. 64km/h = 8 km
13 min. 63km/h = 13 13/20km
9 min. 70km/h = 10 1/2km
13.5 min. 74km/h = 16 13/20km
1.5 min. 80km/h = 4/15km
15 min. 70km/h = 17 1/2km
15 min. 90km/h = 22 1/2km
15 min. 95km/h = 23 3/4km
20 min. 97km/h = 32 1/3km
12 min. 97km/h = 19 2/5km
13 min. 90km/h = 19 1/2km
30 min. 5km/h = 2 1/2km
15 min. 40km/h = 10 km
12 min. 42km/h = 8 2/5km
10.5 min. 41km/h = 7 7/40km
12 min. 42km/h = 8 2/5km
15 min. 42km/h = 10 1/2km
15 min. 5km/h = 1 1/4km

Auszug aus FH 18 aus FH von g4(4)

Eigentlich sollte der Computer nach x auflösen. Der so berechnete Wert entspräche dann dem Schnittpunkt der Graphen, also dem Zeitpunkt, von dem an die Jungen größer als die Mädchen sind.

[Vermutung: #blau unterstrichen#]
Der Schnittpunkt liegt irgendwo bei 11 Jahren.

[Weiteres Vorgehen: #rot unterstrichen#]
Die Grundfunktion der zweiten Jungenfunktion muss anders bestimmt werden. (vgl. S. 123)

Wir nehmen an dieser Stelle erst einmal die gezoomte graphische Lösung: x=11.3]

[#Eine Skizze des gezoomten Ausschnittes mit DERIVE#]

Auszug 19 aus FH von g4(4)

Allgemeine Definitionen für Integralrechnung:

[Rückleitungsfunktion: #unterstrichen#]
Eine Rückleitungsfunktion ist eine Funktion, die ableitbar ist.

[Integrierbarkeit: #unterstrichen#]
Eine Funktion f ist immer dann integrierbar, wenn mindestens eine Rückleitungsfunktion RF existiert und deren Ableitung wieder die Funktion f ist.

Auszug 20 aus FH von g4(4)

Allerdings ist diese Berechnung sehr ungenau, da ich auf dem Funktionsgraphen eine sehr grobe Einteilung gemacht habe.

Deshalb habe ich versucht eine genauere Methode zum Lösen dieser Aufgabe zu finden. Dabei habe ich herausgefunden, daß die Strecke gerade das Produkt von Geschwindig-keit und Zeit ist. Daraus folgt, daß man den x-Wert mit dem y-Wert multiplizieren muß, um die Strecke an diesem Punkt zu finden. D.h. die Strecke ist die Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen bzw. die Rückleitungsfunktion der Fahrtenschreiber-Funktion. Das habe ich damit begründet, dass die Ableitung der Strecke die Geschwindigkeit ergibt und daher um-gekehrt die Rückleitungsfunktion der Geschwindigkeit wieder die Strecke sein muss. Um nun die Aufgabe genauer zu lösen, muß man die Fläche unterhalb des Graphen bis zu x-Achse mit möglichst vielen kleinen Rechtecken errechnen und erhält damit die Strecke, die die Frau gefahren ist.

Auszug 21 aus FH von g4(4)

Nun habe ich versucht, eine Rechenregel für das Integrieren von Funktionen zu finden:

Dabei habe ich zuerst die Ableitungsregel betrachtet:

Funktion f(x):

#10: f(x):=a*x^n

Ableitung der Funktion:

#11: f(x):= a*n*x^(n-1)

Daraub habe ich die Rückleitungsregel definiert:
Funktion, die integriert werden soll:

#12: f(x):=a*x^n

Integrierte Funktion:

#13: f(x):=a/(n+1)*x^(n+1)

Diese Regel ist einfach die Umkehrung der Ableitungsregel.

Allerdings ist diese Rückleitungsregel nicht für alle Funktionen einsetzbar, denn z.B. bei f(x)=e^x habe ich mit meiner Regel ein anderes Ergebnis ermittelt, als DERIVE.

Auszug 22 aus FH von g4(4)

Deshalb ist diese Regel verworfen und einen anderen Lösungsansatz weiter-bearbeitet:

Laut meiner Definition von einem Integral muß man die Fläche zwischen dem Graph und x-Achse errechnen. Aus dieser Überlegung habe ich eine Rückleitungsregel er-mittelt, die erstmal nur für einen bestimmten Bereich gilt: Als Beispiel verwendete ich f(x)=x^2. Um die Fläche möglichst genau zu errechnen, muß man die Fläche in verschiedene Teile unterteilen (siehe Zeichnung). Diese Teile müssen immer kleiner werden, da sich die Rechtecke dann immer mehr an den kreisförmigen Graph annähern. Der andere Faktor ist der dazugehörige y-Wert. Dieser fängt bei dem ersten Wert des festgelegten Bereichs an und wird dann mit den Teilabschnitten addiert bis der Endwert des festgelegten Bereichs erreicht ist. Daraus ergibt sich die folgende Formel:

#14: x/n*f(i*x/n) #leicht verändert#

Auszug 23 aus FH von g4(4)

Hierbei ist x der festgelegte Bereich, n die Anzahl der Teilabschnitte und i die Variable die die Anzahl der Rechtecke erhöht. Allerdings würde bei der obigen Formel nur ein Rechteck ermittelt. Deshalb muß i bis zum Rechteck (n-1) aufsummiert werden.

Auszug 24 aus FH von g4(4)

#15: #Derive Ausdruck: Produktsummen von i=1 bis i=n-1#

Jetzt ist die Formel aber noch nicht völlig komplett da n unendlich# werden muß, denn je mehr Teilabschnitte es gibt, desto mehr Rechtecke gibt es und desto genauer wird die Fläche berechnet.

#16: #Derive Ausdruck: Grenzwert des Ausdrucks #15 mit n->unendlich#

Diese Formel ist jetzt auch auf die Funktion f(x)=e^x anwendbar.

Allerdings ist mir aufgefallen, daß diese Formel nicht auf die Funktion f(x)=1/x anwendbar ist. Dafür habe ich noch keine Lösung gefunden.

Auszug 25 aus FH g3(2)

[Übrige Fragen: #doppelt unterstrichen#]

1) Es heißt: eine Funktion f kann mehrere Grund- (Original-) Funktionen Of haben. Trotzdem ist die Fläche unter dem Graphen von f immer gleich groß- -> ?

Auszug 26 aus FH von g3(2)

zu 1) Der Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse ist immer gleich, Grundfunktionen kann es jedoch verschiedene geben.

Das erklärt sich so:

Das Integral im Intervall [a,b] ist gleich der Differenz von Gf(b) und Gf(a). Da die Grundfunktion Gf(x) für Gf(b) und Gf(a) dieselbe Konstante e besitzt, fällt e durch das Subtrahieren weg. Das gilt für jedes e.

Auszug 27 aus FH von g4(2)

Erklärung des Lösungswegs

Das Größenwachstum der Jungen und Mädchen wird abschnittsweise durch mehrere Funktionen beschrieben. Die Funktionen geben die Größenzunahme pro Jahr an, also die Änderungsrate der Größe zu verschiedenen Zeiten. In der Mathematik entspricht die Änderungsrate einer Funktion aber der 1. Ableitung der Funktion. Wenn man den Vorgang des Differenzierens umkehrt, kann man aus der 1. Ableitung die ursprüngliche Funktion ermitteln. In diesem Fall ist die ursprüngliche Funktion die Wachstumskurve , in der die Größe der Jungen und Mädchen in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen ist. Die Umkehroperation des Differenzierens nennt man Integrieren. Mit Derive kann man bestimmte Integrale und unbestimmte Integrale einer abgeleiteten Funktion berechnen. Wenn man zu den gegebenen Wachstumsfunktionen abschnittsweise die bestimmten Integrale bildet, sieht man, dass jeweils der Größenzuwachs in dem betreffenden Zeitraum berechnet wird. Wenn man diese Werte addiert und eine Anfangsgröße von 50cm (Länge bei der Geburt)addiert, kann man so die Endgröße berechnen. Wenn man die unbestimmten Integrale bildet, kann man die ermittelten Funktionen graphisch darstellen. Es zeigt sich, dass diese integrierten Funktionen alle durch den Ursprung verlaufen. An den Grenzen der Definitionsbereiche befinden sich Sprünge. Das wirkliche Größenwachstum darf aber keine Sprünge aufweisen. Es verläuft kontinuierlich. Der Grund für diesen Widerspruch ist, dass beim Differenzieren die Information über den y-Achsenabschnitt (Konstante) verloren geht. Daher gibt es nur eine abgeleiteten Funktion für alle ursprünglichen Funktion, die sich nur durch ihre Konstante unterscheiden. Zusätzlich zur Berechnung der Integrale müssen also die Konstanten der abschnittsweise gültigen Funktionen berechnet werden. Für die Konstante des Integrals der ersten Funktion ergibt sich sofort er Wert 50cm, da zum Zeitpunkt 0 (Geburt) eine Körpergröße von 50cm vorhanden ist. Die Integrale der 1. Und 2. Funktion müssen an den Grenzen ihrer Definitionsbereiche (6 Jahre) den gleichen Wert haben.

ANHANG B

15 Die Auswertung des Abschlusstests

15.1 Der Abschlusstest

Nachfolgend sind alle in der Arbeit nicht aufgeführten Daten und die zugehörigen Fragebögen dargestellt. Die Fragebögen und die Aufgaben werden, soweit es für die Arbeit notwendig ist, dargestellt. Die Struktur dieses Kapitels orientiert sich an der Struktur der Arbeit. So sind an den meisten Tabellen Querverweise zu den Abschnitten, auf die sich das Datenmaterial jeweils bezieht. Dort können auch die Informationen, die zum Verständnis der Daten notwendig sind, nachgelesen werden. Die Bezeichnung der Abschnitte orientiert sich in erster Linie an dem Untersuchungsgegenstand und danach am verwendeten Analyseverfahren. Verweise auf die Fragebögen und den Test, die in Abschnitt 15.1.2 und 15.1.2 dargestellt sind, sind ebenfalls enthalten.

15.1.1 Die Aufgaben

In diesem Abschnitt sind alle Aufgaben des Tests aufgeführt. Die Aufgaben wurden gemeinsam mit einem Fragebogen an die Schülerinnen gegeben (vgl. Abschnitt 15.1.2). Die Schülerinnen hatten 80 min Zeit für die Bearbeitung.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Funktion *f* mit $f(x)=(x-1)(x+1)$ und der *x*-Achse im Intervall $I=[-3;1]$!

Aufgabe 2. Die Werte in Tabelle 1 geben die Belastung in Bodennähe durch Ozon am 02.08.2000 in Hattingen über eine Stunde in der Mittagszeit wieder. Die gültigen Gesetzesvorlagen sehen Schwellenwerte vor, bei deren Überschreiten Warnungen an die Bevölkerung ausgesprochen werden. Diese Schwellenwerte basieren auf den Stunden- und Tagesmittelwerten, die an den jeweiligen Messstationen gemessen werden. So sollten sich beispielsweise bei 180 $\frac{\mu g}{m^3}$ (1 μg =0,000001 g) Stundenmittel asthmaanfällige Personen nicht länger im Freien aufhalten.

TABELLE 1.

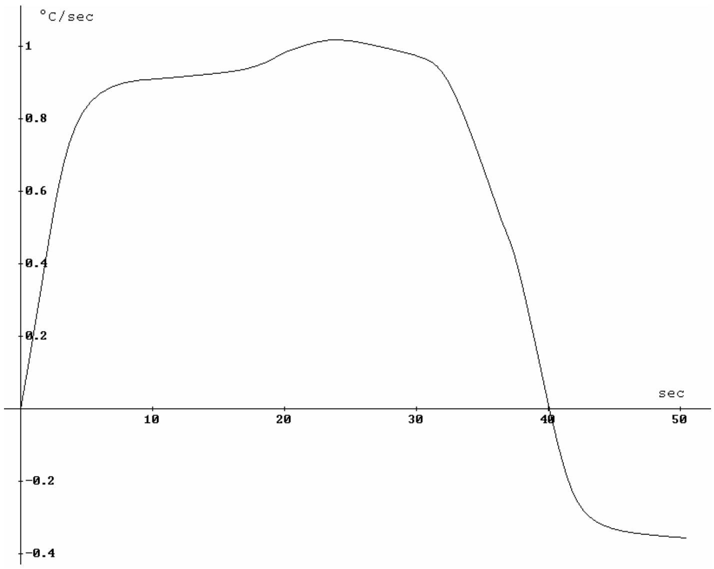
Zeit (min)	Ozonkonzentration ($\mu g/m^3$)
0	165
10	173
20	179
30	183
40	185
50	185
60	183

a) Die Werte in der Tabelle geben die Belastung durch Ozon im Abstand von 10 Minuten an. Bestimmen Sie auf Grundlage dieser Werte ein Stundenmittel der Ozonkonzentration!

Einen kontinuierlichen Verlauf der Belastung in diesem Zeitraum beschreibt die Funktion O mit $O(t) = -0{,}01t^2 + 0{,}9t + 165$ und $t \in [0\,\text{min}; 60\,\text{min}]$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Funktionsterms das Stundenmittel!

Vergleichen und beurteilen Sie die Verfahren aus a) und b) hinsichtlich der Tatsache, dass der Messstation **keine** Funktionsterme zur Beschreibung der Ozonbelastung zur Verfügung steht! Was würden Sie den Betreibern der Messstation raten?

Aufgabe 3. Eine Flüssigkeit wird kurze Zeit erhitzt. Der nachfolgende Funktionsgraph stellt den Verlauf des Temperaturzuwachses pro Sekunde während des Erhitzens und danach dar. Die Temperatur der Flüssigkeit beträgt vor dem Erhitzen zum Zeitpunkt 0 20° Grad.



a) Erläutern Sie den Verlauf des Graphen in eigenen Worten!

b) Bestimmen Sie **ungefähr** einen Zeitpunkt, an dem das Thermometer eine Temperatur von 30° anzeigt! Erläutern Sie kurz Ihr Vorgehen!

Wie ließe sich dieser Zeitpunkt möglichst genau bestimmen?

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt **genau**, an dem das Thermometer die maximale Temperatur anzeigt! Erläutern Sie kurz Ihr Vorgehen!

Aufgabe 4. Treffen die nachfolgenden Aussagen zu? Falls Sie die Antwort wissen, begründen Sie diese kurz in einem Satz![173]

i) Mit Hilfe der Integralrechnung lassen sich Mittelwerte bestimmen!

ii) Das Integral einer Funktion entspricht der Fläche unter dem Funktionsgraphen!

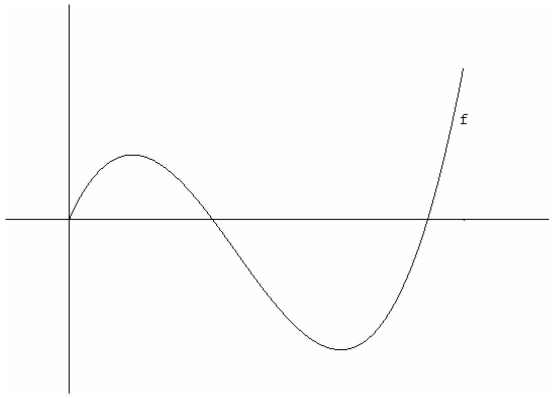
iii) Integrieren ist immer die Umkehrung des Differenzierens.

iv) Ein Funktionsgraph beschreibt den Temperaturverlauf eines Tages. Mit Hilfe der Integralrechnung lässt sich die durchschnittliche Tagestemperatur bestimmen!

[173] Als Antwortmöglichkeiten standen „Ja“, „Nein“ und „Ich weiß nicht“ zur Verfügung. Zudem musste jeder Aufgabenteil begründet werden.

v) Durch die Formel $v = a \cdot t$ wird der Zusammenhang zwischen Beschleunigung *a*, Geschwindigkeit *v* und der Zeit *t* beschrieben. Gegeben ist ein Funktionsgraph, der die Beschleunigung eines Fahrzeugs in der Zeit zwischen 10 Uhr und 11 Uhr darstellt. Die Geschwindigkeit des Fahrzeuges um 10 ^{30}Uhr ist gegeben. Mit Hilfe der Integralrechnung lässt sich die Geschwindigkeit des Fahrzeugs um 11 Uhr bestimmen!

Aufgabe 5. Skizzieren Sie eine zu *f* zugehörige Stammfunktion in das Koordinatensystem! Begründen Sie Ihr Vorgehen!



15.1.2 Der Schülerinnenfragebogen

I. FRAGEN ZUR PERSON

I1. Ich bin eine Schülerin O ein Schüler O

I2. Ich habe an dem Unterrichtsversuch zur Integralrechnung teilgenommen.

Ja O Nein O

I3.Ich hatte in Mathematik auf dem Zeugnis am Ende des letzten Schuljahrs (Sommer 2000) eine

1	2	3	4	5	6

I4. Mit Mathematik beschäftige ich mich

sehr gern	gern	weiß nicht	ungern	sehr ungern

II. FRAGEN ZUM MATHEMATIKUNTERRICHT

II.1. Im Mathematikunterricht zur Integralrechnung

i. haben wir in Form des Werkstatt-Unterrichts gearbeitet (d.i.: eine Sammlung von Problemen wird selbstständig erarbeitet)
ii. fand in Form des Unterrichtsgesprächs statt (d.i.: LehrerIn fragt – SchülerIn antwortet)
iii. haben wir in Gruppen gearbeitet.
iv. haben SchülerInnen anderen Schülerinnen erklärt
v. haben wir zu zweit zusammen gearbeitet.
vi. habe ich in Einzelarbeit (Stillarbeit) gearbeitet.
vii. hat der Lehrer/die Lehrerin vorgetragen.
viii. hat eine Schülerin /ein Schüler vorgetragen.
ix. Sonstiges:__________________________

fast immer O-----O-----O-----O-----O fast nie

II.2. Im Mathematikunterricht zur Integralrechnung
i. haben wir Aufgaben aus dem Alltag bearbeitet.
ii. haben wir Rechenaufgaben bearbeitet.

sehr viele O-----O-----O-----O-----O sehr wenige

III.2.
i. Ich habe während des Mathematikunterrichts zur Integralrechnung mit einem TI oder DERIVE gearbeitet.
ii. Ich habe zu Hause mit dem TI oder DERIVE gearbeitet.

fast immer O-----O-----O-----O-----O fast nie

15.1.3 Der Lehrerinnenfragebogen

I. FRAGEN ZUR PERSON

I.1. Ich bin eine Lehrerin O ein Lehrer O
I.1. Ich habe an dem Unterrichtsversuch zur Integralrechnung teilgenommen.

Ja O Nein O

II. FRAGEN ZUM MATHEMATIKUNTERRICHT

II.1. Welche Sozialformen verwenden Sie im Mathematikunterricht?
i. Werkstatt-Unterricht (d.i.: eine Sammlung von Problemen wird selbstständig erarbeitet)
ii. Gruppenarbeit
iii. Partner- und Partnerinnenarbeit
iv. Einzelarbeit (Stillarbeit)
v. Lernpartnerschaft (SchülerInnen erklären SchülerInnen)
vi. Lehrer-/Lehrerinnenvortrag
vii. Schülerinnen-/Schülervortrag
viii. Sonstiges:____________________

fast immer O-----O-----O-----O-----O fast nie

II.2. Im Mathematikunterricht mussten die Schüler und Schülerinnen
i. Aufgaben aus dem Alltag bearbeiten
ii. kalkülorientierte Aufgaben bearbeiten
iii. komplexe Aufgaben bearbeiten
iv. Beweise durchführen
v. Rechenaufgaben bearbeiten
vi. Verständnisaufgaben bearbeiten
vii. offene Aufgaben bearbeiten.

sehr viele O-----O-----O-----O-----O sehr wenige

III. FRAGEN ZUR INTEGRALRECHNUNG

III.1. Welche Integralbegriffe haben Sie eingeführt?
i. Regelintegral
ii. Riemann-Integral
iii. Cauchy-Integral (d.i. der Grenzwert der Linkssummen.)
iv. Stammfunktions-Integral
v. Sonstiges:__________________

Ja O -----O Nein

III.2. Welche Aspekte des Integralbegriffs haben Sie behandelt?
i. Integral als Fläche
ii. Integral als Mittelwert
iii. Integrieren als Umkehrung des Differenzierens
iv. Integrieren als Approximation von Funktionen

Ja O -----O Nein

v. Integrieren als Approximation von Flächen
vi. Integrieren zur Bestimmung eines Gesamteffekts
vii. Integrieren als Kumulation (d.i. die Aufsummierung von Teilprodukten)
viii. Sonstiges ________________

III.3. Mit welchem Problem, Beispiel, Fragestellung o.ä. haben Sie in den Themenbereich Integralrechnung eingeführt?

III.4. Nach welchem Lehrbuch oder anderen Lehr-/Lernmaterialien sind Sie vorgegangen?

III.5. Erläutern Sie bitte kurz, welche Gesichtspunkte der Integralrechung Sie in Ihrem Unterricht besonders herausgearbeitet haben.

III.6. Haben Sie im Unterricht ähnliche Problemstellungen wie die der Testaufgaben behandelt. Falls ja, wie lauten diese Probleme (z.B. Buch ??, S. ??, Nr. ??) und zu welchen Testaufgaben stehen sie in Verbindung?

15.1.4 Daten zum Schülerinnenfragebogen

Die nachfolgend abgebildeten Tabellen enthalten die relativen Häufigkeiten des Fragebogens, den die Schüler und Schülerinnen zusammen mit dem Test beantworteten (vgl. Abschnitt 15.1.2). Die dort zur Verfügung gestellten fünf Kategorien wurden aus Gründen einer übersichtlicheren Darstellung auf drei Kategorien reduziert. Hierzu wurden die ersten beiden Kategorien der neuen Kategorie „Ja" zugeordnet, die dritte Kategorie entspricht der neuen Kategorie 2 „teils teils" und die letzten beiden Ausprägungen gehen in die Kategorie „Nein" über. Hinsichtlich des Forschungsinteresses (vgl. Abschnitt 11.1.1) werden Häufigkeiten nach Kurszugehörigkeit dargestellt. Die Fragen des Fragebogens sind mit Hilfe von Stichworten dargestellt und mit der entsprechenden Nummerierung auf dem Fragebogen versehen. Die relativen Häufigkeiten sind in Prozent angegeben und sind wie folgt dargestellt (Ja/Nein), alle anderen Antworten sind der zweiten Kategorie zuzurechnen.

Tabelle 15-1. Relative Häufigkeiten des Testfragebogens (in %) (vgl. 11.1.1.1)

Frage (Nr.)/Kurs	LKUC	LKOO	LKUO	GKUC1	GKOO1	GKUC2
Werkstatt (II.1.i)*	(**100**/0)	(0/100)	(10,5/52,6)	(**73,1**/3,8)	(13,6/59,1)	(**85**/0)
Unterrichtsgespräch* (II.1.ii)	(0/**73,3**)	(88,2/0)	(57,9/21,1)	(28/60)	(81,8/9,1)	(5/60)
Gruppenarbeit* (II.1.iii)	(**100**/0)	(0/100)	(52,6/10,5)	(**73,1**/15,4)	(13,6/77,3)	(**70**/0)
Tutorinnen* (II.1.iv)	(**73,3**/0)	(0/82,4)	(42,1/21,1)	(46,2/30,8)	(9,1/68,2)	(**75**/5)
Partnerinnenarbeit (II.1.v)	(6,7/73,3)	(0/100)	(42,1/31,6)	(56/24)	(45,5/22,7)	(5/25)
Einzelarbeit (II.1.vi)	(0/93,3)	(0/64,7)	(31,6/57,9)	(23,1/69,2)	(27,3/27,3)	(0/85)
Lehrerinnenvortrag* (II.1.vii)	(13,3/**80**)	(100/0)	(16,7/50)	(7,7/69,2)	(40,9/13,6)	(0/65)
Schülerinnenvortrag (II.1.viii)	(60/6,7)	(5,9/52,9)	(42,1/26,3)	(15,4/57,7)	(22,7/63,6)	(60/15)
Alltagsaufgaben* (II.2.i)	(**93,3**/0)	(0/100)	(57,9/26,3)	(34,6/15,4)	(13,6/63,6)	(**75**/25)
Rechenaufgaben (II.2.ii)	(26,7/46,7)	(94,1/0)	(68,4/15,8)	(66,7/4,2)	(90,9/9,1)	(10/45)
Computereinsatz in der Schule* (III.2.i)	(**100**/0)	(0/100)	(0/**100**)	(23,1/38,5)	(27,3/63,6)	(**80**/0)
Computereinsatz zu Hause* (III.2.ii)	(**80**/0)	(0/94,1)	(0/**100**)	(0/100)	(9,1/90,9)	(**70**/0)

* Bei diesen Aspekten sind Werte über 70% hervorgehoben.

15.1.5 Analyse der Einzelaufgaben mit der logistischen Regression

Analysetabellen zu den Aufgaben. Nachfolgend sind die zu den im Kapitel 11 zwischen den Testaufgaben und den zugehörigen Variablen diskutierten Daten dargestellt. Signifikante Werte sind hervorgehoben und werden in den jeweiligem Abschnitt eingehender diskutiert. Die linke Spalte in den Korrelationsanalysen (1. K.) befasst sich mit der ersten Konstellation und die rechte Spalte mit der zweiten Konstellation (2. K.). Die benutzten Korrelationskoeffizienten sind in Abschnitt 11 angegeben. Die Korrelationsanalysen sind, nach Aufgaben sortiert, abgebildet.

15.1.5.1 Aufgabe 1.

Tabelle 15-2. Korrelationsanalysetafel der Variablen zu Aufgabe 1(vgl. 11.3.3.1)

Aufgabe 1 und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	0,120	**0,412 (0,01)**
Geschlecht	0,077	-0,015
Note l.H.	**0,341 (0,01)**	**0,398 (0,01)**
Interesse	**0,208 (0,05)**	**0,402 (0,01)**
Teiln. am UV	-0,035	-0,014
Schule	-0,108	**0,412 (0,01)**
Computereinsatz	0,126	
Schulform	**0,242 (0,01)**	

15.1.5.2 Aufgabe 2a.

Tabelle 15-3. Korrelationsanalysetafel der Variablen zu Aufgabe 2a (vgl. 11.3.3.2)

Aufgabe 2a und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	**0,226 (0,05)**	**0,319 (0,001)**
Geschlecht	**0,180 (0,05)**	-0,173
Note l.H.	0,123	0,139
Interesse	**0,210 (0,05)**	**0,319 (0,01)**
Teiln. am UV	**-0,207 (0,05)**	**-0,286 (0,05)**
Schule	**0,217 (0,05)**	**-0,319 (0,01)**
Schulform	-0,127	
Computereinsatz	0,145	

Tabelle 15-4. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 2a (n=116, AR: 8, 16, 26) (vgl. 11.3.3.2)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	22,676	3	0,000
Mc Fadden	0,185		
Korrekte Klassifizierungen	79,3%		

Tabelle 15-5. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 2a (n=116, AR: 8, 16, 26) (vgl. 11.3.3.2)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,301	1,301	3,589	1	0,058	3,674
Mädchen (g)	-1,183	0,577	4,209	1	0,040	0,306
Computereinsatz (r)	-1,417	0,620	5,233	1	0,022	0,242
Konstante	4,013	1,868	4,617	1	0,032	55,324

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-6. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 2a (n=77, AR: 8, 16, 26) (vgl. 11.3.3.2)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	23,461	3	0,000
Mc Fadden	0,309		
Korrekte Klassifizierungen	83,1%		

Tabelle 15-7. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 2a (n=77, AR: 8, 16, 26) (vgl. 11.3.3.2)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	2,500	2,500	2,500	1	0,025	12,183
Mädchen (g)	-1,641	0,877	3,501	2,500	0,061	0,194
UV teilg. (u)	-2,331	0,856	7,417	1	0,006	0,097
Konstante	5,133	2,534	4,104	1	0,043	169,482

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.3 Aufgabe 2b

Tabelle 15-8. Korrelationsanalysetafel 2 b und Variablen (vgl. 11.3.3.3)

Aufgabe 2b und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	0,075	**0,245 (0,05)**
Geschlecht	-0,104	-0,082
Note l.H.	0,179	**0,319 (0,01)**
Interesse	0,121	**0,236 (0,05)**
Teiln. am UV	**0,215 (0,05)**	**0,311 (0,01)**
Schule	-0,063	**-0,245 (0,05)**
Schulform	0,130	
Computereinsatz	**0,297 (0,01)**	

Tabelle 15-9. Informationen zur Modellanpassung zur Aufgabe 2b (n=80; A:) (vgl. 11.3.3.3)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	18,541	7	0,010
Mc Fadden	0,190		
Korrekte Klassifizierungen	72,5%		

Tabelle 15-10. Schätzung der Gleichungsvariablen zur Aufgabe 2b (n=80; A:) (vgl. 11.3.3.3)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	0,921	0,680	1,835	1	0,175	2,512
Mädchen (g)	-0,412	0,584	0,498	1	0,480	0,662
Note			0,062	2	0,970	
schwach (nlh)	-4,353	18,890	0,053	1	0,818	0,013
durchschn. (nlh)	2,147	9,449	0,052	1	0,820	8,559
Interesse			2,192	2	0,334	
ungern (i)	-0,697	0,521	1,789	1	0,181	0,498
teils teils (i)	0,480	0,388	1,532	1	0,216	1,616
UV teilg. (u)	1,611	0,616	6,850	1	0,009	5,009
Konstante	-6,326	9,600	0,434	1	0,510	0,002

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.4 Aufgabe 2 c

Tabelle 15-11. Korrelationsanalysetafel 2 c und Variablen (vgl. 11.3.3.4)

Aufgabe 2c und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	0,082	0,110
Geschlecht	0,148	-0,189
Note l.H.	0,067	**0,231 (0,05)**
Interesse	0,016	0,085
Teiln. am UV	-0,070	0,106
Schule	**-0,187 (0,05)**	-0,110
Schulform	-0,101	
Computereinsatz	-0,140	

Tabelle 15-12. Schätzung der Gleichungsvariablen zur Aufgabe 2c (vgl.11.3.3.4)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-0,812	0,446	3,314	1	0,069	0,444
UV teilg. (u)	0,562	0,497	1,278	1	0,258	1,754
Konstante	-0,927	1,044	0,788	1	0,375	0,396

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-13. Schätzung der Gleichungsvariablen zur Aufgabe 2b (vgl. 11.3.3.4)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,004	0,467	4,621	1	0,032	0,366
Computereinsatz (r)	1,119	0,480	5,433	1	0,020	3,061
Konstante	-1,443	0,923	2,445	1	0,118	0,236

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.5 Aufgabe 3 b

Tabelle 15-14. Korrelationsanalysetafel 3 b und Variablen (vgl. 11.3.3.5)

Aufgabe 3b und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	0,091	**0,240 (0,05)**

Geschlecht	**-0,235 (0,05)**	**-0,303 (0,01)**
Note I.H.	0,158	**0,241 (0,05)**
Interesse	**0,197 (0,05)**	**0,351 (0,01)**
Teiln. am UV	**0,265 (0,05)**	**0,265 (0,05)**
Schule	-0,058	**-0,240 (0,05)**
Schulform	0,073	
Computereinsatz	**0,245 (0,01)**	

Tabelle 15-15. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 3b (n=117, A: 9, 62) (vgl. 11.3.3.5)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	24,802	3	0,000
Mc Fadden	0,181		
Korrekte Klassifizierungen	76,9%		

Tabelle 15-16. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 3b (n=117, A: 9, 62) (vgl. 11.3.3.5)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,804	-1,804	12,298	1	0,000	0,165
Gymn. (sf)	-0,704	0,798	0,778	1	0,378	0,495
Computereinsatz (r)	2,204	0,649	11,512	1	0,001	9,057
Konstante	-0,564	1,261	0,200	1	0,654	0,569

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-17. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 3b (n=80, A:) (vgl. 11.3.3.5)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	25,176	4	0,000
Mc Fadden	0,261		
Korrekte Klassifizierungen	80%		

Tabelle 15-18. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 3b (n=80, A:) (vgl. 11.3.3.5)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,739	-1,739	7,162	1	0,007	0,176
UV teilg. (u)	1,872	0,674	7,719	1	0,005	6,501
Interesse			7,011	2	0,030	
ungern (i)	-1,235	0,569	4,708	1	0,030	0,291
teils teils (i)	0,126	0,437	0,083	1	0,773	1,134
Konstante	-1,573	1,209	1,695	1	0,193	0,207

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-19. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 3b (n=78, A: 9, 43) (vgl. 11.3.3.5)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	57,897	4	0,000
Mc Fadden	0,348		
Korrekte Klassifizierungen	82,1%		

Tabelle 15-20. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 3b (n=78, A: 9, 43) (vgl. 11.3.3.5)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-2,559	0,791	10,458	1	0,001	0,077
UV teilg. (u)	2,717	0,828	12,559	1	0,001	15,141
Interesse			4,557	2	0,102	
ungern (i)	-1,234	0,624	3,913	1	0,048	0,291
teils teils (i)	0,330	0,481	0,473	1	0,492	1,392
Konstante	-1,961	1,313	2,230	1	0,135	0,141

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.6 Aufgabe 3c

Tabelle 15-21. Korrelationsanalysetafel 3 c und Variablen (vgl. 11.3.3.6)

Aufgabe 3c und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	**0,220 (0,05)**	**0,324 (0,01)**
Geschlecht	**-0,267 (0,01)**	**-0,337 (0,01)**
Note I.H.	0,149	0,151
Interesse	0,166	**0,266 (0,05)**
Teiln. am UV	0,096	0,192
Schule	**-0,238 (0,01)**	**-0,324 (0,01)**
Schulform	0,056	
Computereinsatz	0,131	

Tabelle 15-22. Informationen zur Modellanpassung (n=114, A:) (vgl. vgl. 11.3.3.6)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	21,681	4	0,000
Mc Fadden	0,193		
Korrekte Klassifizierungen	85,1%		

Tabelle 15-23. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:) (vgl. vgl. 11.3.3.6)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,491	-1,491	0,555	7,223	1	0,007
UV teilg. (u)	1,549	1,549	0,665	5,426	1	0,020
LK (k)	1,692	1,692	0,594	8,120	1	0,004
Gymn. (sf)	2,233	2,233	0,841	7,057	1	0,008
Konstante	-8,513	-8,513	2,817	9,133	1	0,003

Verknüpfungsfunktion: Logit.

Tabelle 15-24. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 3c (n=119, A:) (vgl. vgl. 11.3.3.6)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	109,453	3	0,000
Mc Fadden	0,110		
Korrekte Klassifizierungen	79%		

Tabelle 15-25. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 3c (n=119, A:) (vgl. vgl. 11.3.3.6)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,604	0,519	-1,604	1	0,002	0,201
Computereinsatz (r)	1,011	0,503	4,042	1	0,044	2,750
Konstante	-0,592	0,946	0,391	1	0,532	0,553

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-26. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 3c (n=119, A:) (vgl. vgl. 11.3.3.6)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	111,977	3	0,000
Mc Fadden	0,089		
Korrekte Klassifizierungen	79%		

Tabelle 15-27. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 3c (n=119, A:) (vgl. vgl. 11.3.3.6)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,439	0,499	8,299	1	0,004	0,237
Teiln. am UV (u)	0,688	0,536	1,645	1	0,200	1,989
Konstante	-0,427	1,106	0,149	1	0,699	0,652

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.7 Aufgabe 4a

Tabelle 15-28. Korrelationsanalysetafel 4 a und Variablen (vgl. 11.3.3.7)

Aufgabe 4a und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	**0,222 (0,05)**	**0,526 (0,01)**
Geschlecht	**-0,216 (0,05)**	**-0,303 (0,01)**
Note I.H.	0,079	0,156
Interesse	**0,245 (0,01)**	**0,421 (0,01)**
Teiln. am UV	0,073	0,097
Schule	-0,179	**-0,526 (0,01)**
Schulform	0,168	
Computereinsatz	**0,191 (0,05)**	

Vergleich zwischen den reduzierten Modellen mit g und k und g und r.

Tabelle 15-29. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 4a (n=119, A:) (vgl. 11.3.3.7)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	0,804	0,439	3,358	1	0,067	2,234
Mädchen (g)	-0,778	0,442	3,098	1	0,078	0,459
Konstante	-0,996	1,046	0,907	1	0,341	0,369

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-30. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 4a (n=119, A:) (vgl. 11.3.3.7)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,256	0,456	7,594	1	0,006	0,285
Computereinsatz (r)	1,173	0,462	6,444	1	0,011	3,233
Konstante	-1,256	0,456	7,594	1	0,006	0,285

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-31. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 4a (n=119, A:) (vgl. 11.3.3.7)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-0,828	0,437	3,582	1	0,058	0,437
Interesse			4,999	2	0,082	
ungern (i)	-0,737	0,394	3,494	1	0,062	0,479
teils teils (i)	0,109	0,323	0,113	1	0,736	1,115
Konstante	0,103	0,681	0,023	1	0,880	1,108

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.8 Aufgabe 4b

Tabelle 15-32. Korrelationsanalysetafel 4 b und Variablen (vgl.11.3.3.8)

Aufgabe 2b und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	0,115	**0,245 (0,05)**
Geschlecht	0,040	0,027
Note l.H.	0,129	0,062
Interesse	-0,022	0,070
Teiln. am UV	0,121	0,147
Schule	-0,082	**-0,245 (0,05)**
Schulform	0,045	
Computereinsatz	0,147	

Tabelle 15-33. Informationen zur Modellanpassung (n=119, A:) (vgl.11.3.3.8)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	7,494	4	0,110
Mc Fadden	0,053		
Korrekte Klassifizierungen	69,7%		

Tabelle 15-34. Schätzung der Gleichungsvariablen (n=119, A:) (vgl.11.3.3.8)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	1,073	0,496	4,680	1	0,031	2,923
Mädchen (g)	0,282	0,432	0,427	1	0,514	1,326
Gymn. (sf)	0,339	0,685	0,245	1	0,621	1,403
Computereinsatz (r)	0,912	0,494	3,385	1	0,065	2,528
Konstante	-4,816	1,890	6,492	1	0,011	0,008

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.9 Aufgabe 4c

Tabelle 15-35. Korrelationsanalysetafel 4 c und Variablen (vgl.11.3.3.9)

Aufgabe 4c und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	**0,419 (0,01)**	**0,648 (0,01)**
Geschlecht	0,051	-0,015
Note l.H.	**0,299 (0,01)**	**0,310 (0,01)**
Interesse	**0,243 (0,01)**	**0,400 (0,01)**
Teiln. am UV	0,056	0,217
Schule	**-0,471 (0,01)**	**-0,648 (0,01)**
Schulform	**0,208 (0,05)**	
Computereinsatz	**0,205 (0,05)**	

15.1.5.10 Aufgabe 4d

Tabelle 15-36. Korrelationsanalysetafel 4 d und Variablen (vgl.11.3.3.10)

Aufgabe 4d und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	**0,220 (0,05)**	**0,383 (0,01)**
Geschlecht	0,016	-0,047
Note I.H.	0,137	**0,232 (0,05)**
Interesse	0,174	**0,288 (0,05)**
Teiln. am UV	**0,188 (0,05)**	**0,298 (0,01)**
Schule	**-0,219 (0,05)**	**-0,383 (0,01)**
Schulform	0,087	
Computereinsatz	**0,240 (0,01)**	

Tabelle 15-37. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 4d (n=119, A:) (vgl.11.3.3.10)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	23,473	4	0,000
Mc Fadden	0,212		
Korrekte Klassifizierungen	79,8%		

Tabelle 15-38. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 4d (n=119, A:) (vgl.11.3.3.10)

Ausprägung	Regressionskoeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	2,245	0,609	13,573	1	0,000	9,438
Mädchen (g)	0,244	0,508	0,231	1	0,631	1,277
Teiln. am UV (u)	2,004	0,671	8,929	1	0,003	7,420
Gymn. (sf)	2,592	0,822	9,945	1	0,002	13,362
Konstante	-13,104	3,017	18,865	1	0,000	0,000

Verknüpfungsfunktion: Logit

Vergleich des Einflusses von r und u in A4d

Tabelle 15-39. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 4d (n=119, A:) (vgl.11.3.3.10)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Teiln. am UV (u)	1,070	0,538	3,960	1	0,047	2,914
Konstante	-2,987	0,989	9,128	1	0,003	0,050

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-40. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 4d (n=119, A:) (vgl.11.3.3.10)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Computereinsatz (r)	1,188	0,466	6,488	1	0,011	3,281
Konstante	-3,021	0,808	13,983	1	0,000	0,049

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.11 Aufgabe 4e

Tabelle 15-41. Korrelationsanalysetafel 4 e und Variablen (vgl.11.3.3.11)

Aufgabe 4e und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	**0,224 (0,05)**	**0,440 (0,01)**
Geschlecht	-0,030	-0,108
Note I.H.	0,087	0,067
Interesse	**0,256 (0,01)**	**0,412 (0,01)**
Teiln. am UV	0,058	**0,298 (0,01)**
Schule	**0,182 (0,05)**	**-0,440 (0,05)**
Schulform	0,080	
Computereinsatz	0,113	

Tabelle 15-42. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 4e (n=119, A:) (vgl.11.3.3.11)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	5,926	1	0,015
Mc Fadden	0,041		
Korrekte Klassifizierungen	70,6%		

Tabelle 15-43. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 4e (n=119, A:) (vgl.11.3.3.11)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
LK (k)	0,993	0,413	5,773	1	0,016	2,700
Konstante	-2,343	0,664	12,457	1	0,000	0,096

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-44. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 4e (n=119, A:) (vgl.11.3.3.11)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	8,463	2	0,015
Mc Fadden	0,074		
Korrekte Klassifizierungen	80%		

Tabelle 15-45. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 4e (n=119, A:) (vgl.11.3.3.11)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Interesse				2	0,027	
ungern (i)	-0,873	0,388	5,063	1	0,024	0,418
teils teils (i)	0,137	0,312	0,194	1	0,660	1,147
Konstante	-1,072	0,235	20,770	1	0,000	0,342

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.5.12 Aufgabe 5

Tabelle 15-46. Korrelationsanalysetafel 5 und Variablen (vgl.11.3.3.12)

Aufgabe 5 und Variable	Korrelation (1. K)	Korrelation (2. K)
Kursart	0,105	**0,356 (0,01)**
Geschlecht	-0,026	-0,192
Note I.H.	0,071	0,094
Interesse	0,041	0,171
Teiln. am UV	0,129	**0,256 (0,05)**
Schule	-0,132	**-0,356 (0,01)**
Schulform	**0,259 (0,01)**	
Computereinsatz	**0,311 (0,01)**	

Tabelle 15-47. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 5 (n=80, A:) (vgl.11.3.3.12)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	8,024	2	0,018
Mc Fadden	0,101		
Korrekte Klassifizierungen	66,3%		

Tabelle 15-48. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 5 (n=80, A:) (vgl.11.3.3.12)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-1,015	0,525	3,747	1	0,053	0,362
Teiln. UV (u)	1,180	0,546	4,675	1	0,031	3,255
Konstante	-1,178	1,095	1,159	1	0,282	0,308

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-49. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 5 (n=80, A:) (vgl.11.3.3.12)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	2,963	1	0,085
Mc Fadden	0,040		
Korrekte Klassifizierungen	70%		

Tabelle 15-50. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 5 (n=80, A:) (vgl.11.3.3.12)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-0,847	0,498	2,899	1	0,089	0,429
Konstante	0,442	0,778	0,323	1	0,570	1,556

Verknüpfungsfunktion: Logit

Tabelle 15-51. Informationen zur Modellanpassung zu Aufgabe 5 (n=80, A:) (vgl.11.3.3.12)

		Freiheitsgrade	Sig.
LR-Test	18,467	3	0,000
Mc Fadden	0,248		
Korrekte Klassifizierungen	84,8%		

Tabelle 15-52. Schätzung der Gleichungsvariablen zu Aufgabe 5 (n=80, A:) (vgl.11.3.3.12)

Ausprägung	Regressions-koeffizient (β)	Standard-fehler	Wald	Freiheits-grade	Sig.	e^{β}
Mädchen (g)	-0,708	0,580	1,489	1	0,222	0,493
LK (k)	1,833	0,601	9,285	1	0,002	6,252
Teiln. UV (u)	1,625	0,636	6,532	1	0,011	5,078
Konstante	-5,073	1,771	8,210	1	0,004	0,006

Verknüpfungsfunktion: Logit

15.1.6 Aufgabenübergreifende Beziehungen

In diesem Abschnitt werden die zu dem in Abschnitt 11.3.4 dargestellten Analyseverfahren der kategorialen Hauptkomponentenanalyse HOMALS zugeordneten Daten dargestellt. Diese sind entsprechend der Struktur des Abschnittes geordnet. Die Variablen und die Nomenklatur werden in Abschnitt 11.3.4 erläutert.

Tabelle 15-53. Kategorienquantifikation (A: 1-5) (vgl. 11.3.4.1)

Aufgaben/ Dimension	1	2	3	4
N1	0,256	0,232	0,256	-0,324
J1	-0,833	-0,752	0,101	1,053
N2	0,702	-0,823	0,709	-0,459
J2a	-0,206	0,242	-0,208	0,135
N2b	0,463	-0,203	0,010	-0,114
J2b	-1,112	0,488	-0,023	0,273
N2c	0,331	-0,289	0,011	-0,058
J2c	-1,077	0,940	-0,035	0,189
N3b	0,453	-0,182	-0,199	0,130
J3b	-1,133	0,455	0,497	-0,326
N3c	0,391	-0,034	-0,220	0,039
J3c	-1,469	0,126	0,827	-0,148

Aufgaben/ Dimension	1	2	3	4
N4a	0,394	-0,045	0,151	0,131
J4a	-1,027	0,117	-0,392	-0,341
N4b	0,271	0,240	0,306	0,131
J4b	-0,600	-0,531	-0,678	-0,290
N4c	0,250	0,182	0,106	-0,192
J4c	-1,103	-0,802	-0,467	0,848
N4d	0,311	0,248	0,003	0,240
J4d	-0,967	-0,769	-0,009	-0,745
N4e	0,389	0,061	0,219	0,156
J4e	-0,933	-0,145	-0,526	-0,375
N5	0,303	0,204	-0,298	-0,035
J5	-0,859	-0,579	0.846	0,100

J4c: Aufgabe 4c wurde inhaltlich verstanden
N3b: Aufgabe 3b wurde inhaltlich nicht verstanden

15.1.6.1 Diagramme für die Schülerinnen des Unterrichtsversuchs

Tabelle 15-54. Diskriminanzmaße und Eigenwerte (u=t; A1-3)

	Dimension 1	2
Eigenwerte	0,449	0,211
Diskriminanzmaße		
Aufgabe 1	0,18	0,45
Aufgabe 2a	0,12	0,44
Aufgabe 2b	0,63	0,01
Aufgabe 3b	0,56	0,11
Aufgabe 3c	0,76	0,04

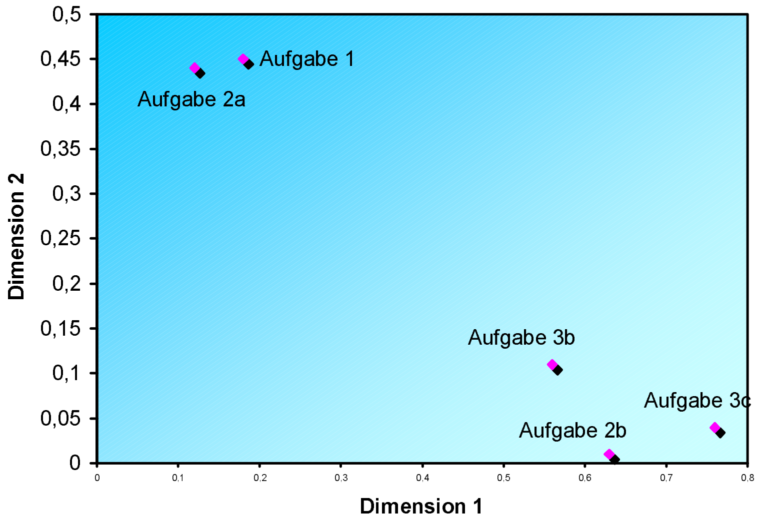


Abbildung 15.1. Diskriminanzmaße (u=t; A1-3)

15.1.6.2 Diagramme für die Schülerinnen der Vergleichskurse

Tabelle 15-55. Diskriminanzmaße und Eigenwerte (u=t; A1-3)

	Dimension 1	2
Eigenwerte	0,449	0,211
Diskriminanzmaße		
Aufgabe 1	0,24	0,49
Aufgabe 2a	0,32	0,40
Aufgabe 2b	0,58	0,03
Aufgabe 3b	0,67	0,00
Aufgabe 3c	0,68	0,02

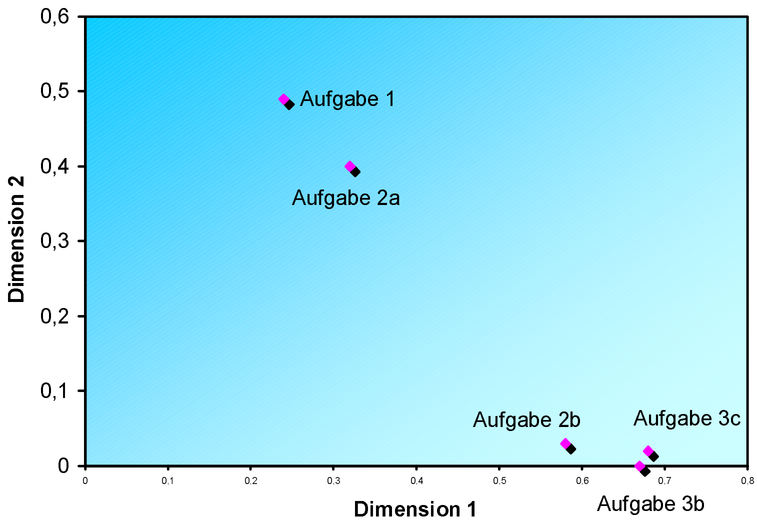


Abbildung 15.2. Diskriminanzmaße (u=t; A1-3)

Anhang C

16 Die Auswertung der Fragebögen

16.1 Allgemeine Fragen

Neben den nachfolgenden Fragen wurden aus Sicherheitsgründen hinsichtlich der eindeutigen Zugehörigkeit die einzelnen Schülerinnen und die Schulzugehörigkeit kodiert. Die Fragebögen enthalten alle für die vorliegende Arbeit relevanten Fragen. Die Antwortkategorien zu den Fragebögen sind in Kapitel 13 erläutert.

Tabelle 16-1. Allgemeine Fragen

A 1. Ich bin	○ eine Schülerin ○ ein Schüler
A 2. Schulnote des Schuljahres Sommer 2000	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6
A 3. Schulnote des Halbjahres Winter 2000/ 2001	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6
A 4. Note in der Klausur zur Integralrechung	○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6
A 5. Schulzugehörigkeit	○ S1 ○ S2 ○ S3 ○ S4
A 6. Ich mag Mathematikunterricht	sehr gerne ○ ○ ○ ○ ○ nicht gerne

16.2 Fragebogen zu den Forschungsheften

Tabelle 16-2. Fragen zum Forschungsheft

F1. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da es mir ermöglicht selbst erfundene Mathematik nieder zu schreiben
F2. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da ich so ein individuelles Schulbuch besitze.
F3. Das Forschungsheft gefällt mir nicht gut, da das Schreiben des Forschungshefts viel Arbeit ist.
F4. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da es mir hilft das Gelernte zu strukturieren.

F5. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da ich dort auch Dinge notieren kann, die ich noch nicht verstanden habe.
F6. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da ich selber bestimmen kann, welche Aufgaben und welche Beispiele für mich wichtig und hilfreich sind.
F7. Das Forschungsheft gefällt mir gut, da es meine individuelle Sprache enthält.
F8. Das Führen des Forschungshefts macht nicht mehr Arbeit als die normalerweise im Unterricht anfallenden Arbeiten.
F9. Im Forschungsheft kann ich die Ergebnisse meiner eigenen Forschung niederschreiben.
F10. Während des Schreibens des Forschungshefts merke ich oft, dass einiges, von dem ich dachte, ich hätte es verstanden, doch noch nicht klar ist.
F11. Die Vorteile des Forschungshefts überwiegen gegenüber den Nachteilen.
F12. Das Forschungsheft gefällt mir nicht gut, da es unübersichtlicher ist als ein Schulbuch.
F13. Mir würde es besser gefallen, wenn ich zusätzlich zum Forschungsheft noch ein Schulbuch hätte.
F14. Das Forschungsheft hilft mir mich auf die Klausuren vorzubereiten.
F15. Das Forschungsheft gefällt mir nicht gut, da ich nicht weiß, was ich alles in das Forschungsheft schreiben soll.
F16. Auch in anderen Fächern sollten Forschungshefte geführt werden.
F17. Ich halte es für sinnvoll, in Zukunft weiterhin ein Forschungsheft zu führen.

16.3 Fragebogen zum Werkstattunterricht

Tabelle 16-3

W1. Im Werkstattunterricht kann man konzentrierter und effektiver als im üblichen Unterricht arbeiten.
W2. Im Werkstattunterricht wird die Mathematik anspruchsvoller als im üblichen Unterricht.
W3. Im Werkstattunterricht kann man selbstständiger als im üblichen Unterricht arbeiten.
W4. Im Werkstattunterricht kann man sein Lerntempo selbst bestimmen.
W5. Im Werkstattunterricht kann man Mathematik erfinden.
W6. Der Werkstattunterricht trägt zu einer angenehmeren Lernatmosphäre bei, als es im üblichen Unterricht möglich ist.
W7. Im Werkstattunterricht kann ich im Rahmen der Aufgabenstellungen selbst bestimmen, was ich bearbeiten möchte.
W8. Im Werkstattunterricht lässt sich eine individuelle Fachsprache entwickeln.
W9. Im Werkstattunterricht muss man selbst erkennen, was wahr und was falsch ist.
W10. Der Werkstattunterricht ist anstrengender als der übliche Unterricht.
Die Arbeit im Werkstattunterricht finde ich nicht gut,
W11. da meine Konzentration durch die Diskussionen anderer SchülerInnen gestört wird.
W12. da der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben mich überfordert.
W13. da die Lehrperson mir nicht direkt sagt, was ich falsch mache.
W14. die Gruppen leistungsmäßig zu sehr gemischt sind.
W15. da es nicht mehr möglich ist, durch die Lösung von Rechenaufgaben in Mathematik eine gute Note zu bekommen.

W16. da die Mathematik schwieriger geworden ist.
W17. da meine Meldungen im Unterricht weniger Einfluss auf meine mündliche Note haben.
W18. weil ich stärker gefordert bin, selbstständig zu arbeiten.
W19. weil ich nicht mehr was falsch und was richtig ist.
W20. weil die guten SchülerInnen noch besser und die nicht so guten SchülerInnen noch schlechter werden.
W21. weil ich erkenne, dass ich viele Wissenslücken habe.
W22. da ich mehr denken muss.
Die Arbeit im Werkstattunterricht finde ich gut,
W23. da ich mit anderen SchülerInnen zusammenarbeiten kann.
W24. da ich mein Lerntempo selbst bestimmen kann.
W25. da ich die für mich interessanten Fragestellungen und Aufgaben selbst aussuchen kann.
W26. da ich Mathematik selbst erfinden kann.
W27. da ich seither den Mathematikunterricht viel interessanter finde.
W28. da die Mathematik anspruchsvoller geworden ist.
W29. da die Mathematik verständlicher geworden ist.
W30. da die Problemstellungen realitätsnäher geworden sind.
W31. weil der Unterricht mehr Spaß macht.
W32. weil ich eine eigene Fachsprache entwickeln kann.
W33. weil ich mich in meiner Arbeit ernst genommen fühle.
W34. weil die Lehrperson mir im persönlichen Gespräch besser helfen kann.
W35. weil der Unterricht nicht so anstrengend ist.
W36. weil ich einen Großteil der Zeit intensiv arbeiten kann.
W37. weil meine Bedürfnisse mehr berücksichtigt werden.
W38. weil ich den anderen SchülerInnen „dumme" Fragen stellen kann, ohne dafür eine schlechte Note fürchten zu müssen.
W39. weil ich der Lehrperson „dumme" Fragen stellen kann, ohne dafür eine schlechte Note fürchten zu müssen.
W40. weil ich auf meine Wissenslücken aufmerksam werde.
W41. weil ich die Lernatmosphäre gut finde.
W42. weil der Unterricht abwechslungsreicher geworden ist.
W43. weil der Zusammenhalt im Kurs mehr gefördert wird.
W44. Der Werkstattunterricht gefällt mir besser als die Unterrichtsformen, die ich bislang kennen gelernt habe
W45. Der Werkstattunterricht sollte sich mit anderen Unterrichtsformen abwechseln.
W46. Das selbstständige Arbeiten fällt mir schwer
W47. Durch die Art des Unterrichts habe ich das Gefühl besser Mathematik zu können, als ich zuvor angenommen habe.
W48. Durch die Art des Unterrichts habe ich das Gefühl schlechter Mathematik zu können, als ich zuvor angenommen habe.
W49. Das selbstständige Arbeiten war am Anfang schwierig, es ist mittlerweile aber einfacher geworden

16.4 Fragebogen zum Computereinsatz

R1. Der Mathematikunterricht ist durch den Einsatz des Computers interessanter geworden.
R2. Ich brauche durch den Einsatz des Computers nicht mehr über Formeln nachzudenken.
R3. Durch den Einsatz des Computers wird der Unterricht zwar anders, aber nicht unbedingt besser oder interessanter.
R4. Seit wir den Computer verwenden, habe ich Schwierigkeiten, wenn ich Beispiele ohne Computer lösen soll.
R5. Der Einsatz des Computers ist ganz nett, aber eine wirkliche Verbesserung des Unterrichts bringt er nicht.
R6. Eigentlich mag ich überhaupt nicht mehr ohne den Computer arbeiten.
R7. Der Umgang mit dem Computer erschwert mir mein Verständnis der Mathematik.
R8. Durch das Nachdenken über die Computerbedienung werde ich öfters von mathematischen Problemen abgelenkt.
R9. Durch den Einsatz des Computers macht der Mathematikunterricht mehr Spaß.
R10. Ich verstehe mathematische Probleme besser, wenn ichsie zuerst ohne Computer gelöst oder wenigstens angedacht habe.
R11. Ich möchte auch in Zukunft mit Einsatz des Computers im Mathematikunterricht arbeiten.
R12. Ein großer Vorteil des Computers liegt in seiner Stärke bei Rechenaufgaben. (Das sind Aufgaben, bei denen durch Routinerechnungen das Ergebnis erzeugt werden kann.)
R13. Ein großer Vorteil des Computers liegt in seiner Stärke bei graphischen Veranschaulichungen.
R14. Ein großer Vorteil des Computers liegt in seiner Stärke bei Problemlöseaufgaben. (Das sind Aufgaben, bei denen in erster Linie durch Denken das Ergebnis erzeugt werden kann.)

16.5 Fragen zu den Problemstellungen

P1. Durch die neuen Probleme habe ich mehr als bisher auf den Mathematikunterricht gefreut.
P2. Das Problem „Wasserverbrauch“ fand ich interessant.
P3. Das Problem „Fahrtenschreiber“ fand ich interessant.
P4. Das Problem „Geschlechterwachstum“ fand ich interessant.
P5. Die Auseinandersetzung mit dem Problem "Wasserverbrauch" hat mir was gebracht.
P6. Die Auseinandersetzung mit dem Problem "Fahrtenschreiber" hat mir was gebracht.
P7. Die Auseinandersetzung mit dem Problem "Geschlechterwachstum" hat mir was gebracht.
P8. Die Auseinandersetzung mit den neuen Problemstellungen war langweilig.

16.6 Fragen zu den affektiven Einstellungen

A1. Wenn ich an Mathematikunterricht denke, verspüre ich Angst.
A2. Ich freue mich auf den Mathematikunterricht.
A3. Vor den Mathematikklausuren habe ich Angst.
A4. Vor dem Mathematikunterricht habe ich immer schon Angst gehabt.
A5. Ich bin mit mir und meinem Leben zufrieden.
A6. Ich fühle mich in der Schule wohl.

Literaturverzeichnis

ALBERT, H. (1977) *Kritische Vernunft und menschliche Praxis.* Reclam, Stuttgart.

ASPETSBERGER, K. (1992) DERIVE for students at the age of 17-18. In: *DERIVE in education* (Hg. von H. Heugl).

AUFSCHNAITER, S.V., FISCHER, H.E. & SCHWEDES, H. (1992) Kinder konstruieren Welten. Perspektiven einer konstruktivistischen Physikdidaktik. In: *Kognition und Gesellschaft* (Hg. von S. J. Schmidt), Frankfurt a. M.

AUSUBEL, D.P. (1980/81) *Psychologie des Unterrichts.* Beltz, Weinheim.

BACKHAUS, K., ERICHSON, B. & PLINKE, W. (2000) *Multivariate Analysemethoden.* Springer, Berlin.

BALTES-GÖTZ, B. (1999) Logistische Regressionsanalyse. Universität Rechenzentrum Trier.

BARNES, M. (1994) Investigating change: a gender-inclusive course in calculus. *ZDM*, **26**(2), 49-56.

BARROWS, H. (1986) A taxonomy of problem based learning methods. *Medical Teacher*, **20**, 481-486.

BAUERSFELD, H. (1995) The structuring of structures: Development and function of mathematizing as a social practice. In: *Constructivism in education* (Hg. von L. P. Steffe & J. Gale). Erlbaum, Hilldale, NJ.

BAUMANN, R. (1998) *Analysis 1, Ein Arbeitsbuch mit DERIVE*, Stuttgart.

BAUMERT, J., BOS, W. & WATERMANN, R. (1998) TIMSS/III Schülerleistungen in Mathematik und den Naturwissenschaften am Ende der Sekundarstufe II im internationalen Vergleich. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin.

BAUMERT, J. & LEHMANN, R. (1997) *TIMSS-Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich.* Leske & Budrich, Opladen.

BENDER, P. (1990) Zwei Zugänge zum Integralbegriff. *math. did.*, **13**(3/4), 102-127.

BERKELEY, G. (1710/1957) *A treatise concerning the principles of human understanding*, London.

BICHSEL, P. (1974) *Kindergeschichten.* Luchterhand. Darmstadt.

BIERI, P. (1994) *Philosophischer Skeptizismus. Einleitung.* Beltz-Athenäum, Weinheim.

BLUM, W. (1975) Ein Grundkurs in Analysis. *Didaktik der Mathematik*, **3**, 153-184.

BLUM, W. (1978) Einkommenssteuern als Thema des Analysisunterrichts in der beruflichen Oberstufe. *Die berufsbildende Schule*, **30**(11), 642-651.

BLUM, W. (1995) Quo vadis Analysisunterricht? Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven für das Jahr 2000. *Didaktik-Reihe der ÖMG*, **24**, 2-19.

BLUM, W. & KIRSCH, A. (1979) Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *MU*, **3**.

BLUM, W. & TÖRNER, G. (1983) *Didaktik der Analysis.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

BÖHM, J. (1992) The Riemann Integral and DERIVE- An Attempt. -. In: *Teaching Mathematics with DERIVE* (Hg. von J. Böhm). Bromley, Chartwell Bratt.

BREHMER, I., KÜLCHEN, H. & SOMMER, L. (1989) *Mädchen, Macht (und) Mathe, Geschlechtsspezifische Leistungskurswahl in der reformierten Oberstufe*, Düsseldorf.

BRUNER, J.S., OLVER, R.R. & GREENFIELD, P.M. (1971) *Studien zur kognitiven Entwicklung.* Klett, Stuttgart.

BRÜNING. (1994) *Handbuch zur Analysis.* Schroedel, Hannover.

BUCHBERGER, B. (1992) Teaching math by math software. Newtons method as an example of the white box/black box principle. Universität Linz.

BUSSMANN, H. & WENZELBURGER, W. (1977) *Anschauliche Integralrechnung.* München

CIOMPI, L. (1982) *Affektlogik. Über die Struktur der Psyche und ihrer Entwicklung. Ein Beitrag zur Schizophrenieforschung.* Klett-Cotta, Stuttgart.

CIOMPI, L. (1999) *Die emotionalen Grundlagen des Denkens. Entwurf einer fraktalen Affektlogik.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

COBB, P. & YACKEL, E. (1996) Constructivist, emergent, and socioculturell perspectives in the context of developement research. *Educational Psychologist*, **31**(3), 175-190.

COGNITION AND TECHNOLOGY GROUP OF VANDERBILT (1992) The Jasper series as an example of anchored instruction: Theory, program, description, and assessment data. *Educational Psychologist*, **27**, 291-315.

COGNITION AND TECHNOLOGY GROUP OF VANDERBILT (1993) Designing learning environments that support thinking: The Jasper series as a case study. In: *Designing environments for contructive learning* (Hg. von T. M. e. a. Duffa), Berlin.

COGNITION AND TECHNOLOGY GROUP OF VANDERBILT (1997) The Jasper project: Lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development. In: *Educational Psychologist*, Erlbaum.

COLLINS, A., BROWN, J.S. & NEWMAN, S. (1989) Cognitive Apprenticeship: Teaching the craft of Reading, Writing and Mathematics. In: *Knowing, Learning and Instruction: Essays in honor of Robert Glaser.* Erlbaum, Hillsdale, N.Y.

DEWEY, J. (1998) *Die Suche nach Gewissheit.* Suhrkamp, Frankfurt a.M.

DIELS, H. (1957) *Fragmente der Vorsokratiker.* Hamburg.

DÖRFLER, W. (1991) Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften*, **21**.

DUBS, R. (1995) Konstruktivismus: Einige Überlegungen aus der Sicht der Unterrichtsgestaltung. *Zeitschrift für Pädagogik*, **41**, 889-903.

DUCHASTEL, P.C. (1990) Discussion: Formal and Informal Learning with Hypermedia. In: *Designing Hypermedia for Learning* (Hg. von D. H. Jonassen & H. Mandel). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

DUIT, R. (1995) Die Rolle der konstruktivistischen Sichtweise in der naturwissenschaftsdidaktischen Lehr- und Lernforschung *Zeitschrift für Pädagogik*, **41** (6), 905-924.

ENZENSBERGER, H.M. (1998) Zugbrücke außer Betrieb. *Faz, 29. August.*

FAHRMEIR, L. & HAMERLE, A. (1984) *Multivariate statistische Verfahren.* De Gruyter, Berlin-New York.

FAULSTICH-WIELAND, H. & NYSSEN, E. (1998) Geschlechtsverhältnisse im Bildungssystem - Eine Zwischenbilanz. In: *Jahrbuch der Schulentwicklung* (Hg. von H.-G. Rolff). Juventa-Verl., Weinheim & München.

FISCHER, R. (1978) Die Rolle des Exaktifizierens. *ZDM*, **4**, 184-192.

FLACKE, M. (1998) Radikal-Konstruktivistische Wissenstheorie oder sozialkonstruktivistische Praxis. *Ethik und Sozialwissenschaften*, **Jg. 9**(Heft 4), 520-522.

FRAUNHOLZ, W. (1999) Interaktive Visualisierung zur Unterstützung der Begriffsbildung in der Analysis. In: *Mathematische Bildung und neue Technologien* (Hg. von G. e. a. Kadunz). B.G. Teubner, Stuttgart/Leipzig.

FREGE, G. (1975) *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien.* Göttingen.

FREUDENTHAL, H. (1973) *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Bde 1,2, Klett, Stuttgart.

GADAMER, H.G. (1965) *Wahrheit und Methode.* Mohr, Tübingen.

GALLIN, P. & RUF, U. (1993) Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. *JMD*, **14**, 3-33.

GALLIN, P. & RUF, U. (1998) *Sprache und Mathematik in der Schule.* Kallmeyer, Seelze.

GALLIN, P. & RUF, U. (1999) Ein Unterricht mit Kernideen und Reisetagebuch. *Mathematik lehren*(64), 51-57.

GERGEN, K.J. (1985) The social construvtionist movement in modern psychology. *American Psychologist*, **40**, 266-275.

GERGEN, K.J. (1995) Social constructivism and the educational process. In: *Constructivism in education* (Hg. von L. Steffe & J. Gale). Erlbaum, Hillsdale, NJ.

GERSTENMAIER, J. & MANDL, H. (1999) Konstruktivistische Ansätze in der Erwachsenenbildung und Weiterbildung. *Handbuch Erwachsenenbildung/Weiterbildung*, 184-192.

GESELLSCHAFT FÜR INFORMATIK (1993) Veränderte Sichtweisen für den Informatikunterricht. *Computer und Unterricht*, **3**(12).

GIFI, A. (1990) *Nonlinear Multivariate Analysis.* Wiley, Chichester.

GRIESEL, H. & POSTEL, H. (1988) *Mathematik heute. Eine Einführung in die Analysis.* Schroedel, Hannover.

GROGGER, G. (1995) Der Einsatz von Derive im Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen. Zentrum für Schulentwicklung, Graz.

GROGGER, G. (1998) *Evaluation zur Erprobung des TI 92 im Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen*, Graz.

HABERMAS, J. (1991) *Erläuterungen zur Diskursethik*. Suhrkamp, Frankfurt a.M.

HAHN, O. & DZEWAS, J. (1990) Mathematik. Leistungskurs Analysis.

HEJL, P. (1995) Konstruktivismus und gesellschaftliche Selbstregelung. In: *DELFIN 1995: Konstruktivismus und Ethik*.

HENTSCHEL, T. & PRUZINA, M. (1995) Taschenrechner im Mathematikunterricht - Ergebnisse aus einem Schulversuch (in Klasse 9/10). *Journal für Mathematik-Didaktik*, **16**(3/4).

HESKE, H. (1998) Mathe Explorer Logbuch 7.2. *Mathematik in der Schule*, **36**.

HEUGL, H., KLINGER, W. & LECHNER, J. (1996) *Computeralgebra-Systeme im Mathematikunterricht*. Addison-Wesley, Bonn.

HEYMANN, H.W. (1996) *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz, Weinheim und Basel.

HISCHER, H. (1992) Wie viel Termumformungen braucht der Mensch? — Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden. In: *Bericht über die 10. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 25. bis 27. September 1992 in Wolfenbüttel* (Hg. von H. Hischer). Franzbecker, Hildesheim.

HISCHER, H. (1993) Mathematikunterricht und Computer — neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen? In: *Bericht über die 11. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 8. bis 10. Oktober 1993 in Wolfenbüttel.* (Hg. von H. Hischer). Franzbecker, Hildesheim.

HISCHER, H. (1994) Fundamentale Ideen. Zur Zielorientierung des Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik. In: *Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 23. bis 26. September 1994 in Wolfenbüttel* (Hg. von H. Hischer). Franzbecker, Hildesheim.

HISCHER, H. (1995) Rechenfertigkeit und Begriffsbildung. Zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. In: *Bericht über die 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 22. bis 25. September 1995 in Wolfenbüttel* (Hg. von H. Hischer & M. Weiß). Franzbecker, Wolfenbüttel.

HOELSCHER, G.R. (1994) *Kind und Computer*. Springer, Heidelberg.

HOLE, V. (1998) *Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I*. Auer, Donauwörth.

HUßMANN, S. (2000) Das Mathematikatelier: Unterrichtsmaterialien. Essen, http://www.uni-essen.de/mathewerkstatt.

HYDE, J.S., FENNEMA, E. & LAMON, S.J. (1990) Gender Differences in Mathematics Performance: A Meta-Analysis. *Psychelogical Bulletin*, **107**, 139-155.

JAMES, W. (1977) *Pragmatismus- ein neuer Name für alte Denkmethoden*. Oehler, Hamburg.

KAHLERT, H. (2000) Konstruktion und Dekonstruktion von Geschlecht. In: *Lesarten des Geschelchts* (Hg. von D. Fischer, D. Lemmermöhle & D. Klika). Leske & Budrich, Opladen.

KAMLAH, W. & LORENZEN, P. (1992) *Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens*. Metzler, Stuttgart.

KANT, I. (1787) Kritik der reinen Vernunft. In: *Kants Werke*, *IV*, Berlin.

KAYSER, H.J. (1996) *Analysis mit DERIVE*. Dümmler, Bonn.

KEIL, E.A. (1991) *Die Infinitesimalrechnung*. BSV, München.

KELLER, C. (1998) Geschlechterdifferenzen in der Mathematik: Prüfung von Erklärungsansätzen. In: *Philosophische Fakultät I*. Dissertation, Universität Zürich.

KNOCHE, N. & WIPPERMANN, H. (1986) *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim - Wien - Zürich.

KNORR-CETINA, K. (1989) Einige Spielarten des Konstruktivismus. *Soziale Welt*, **40**(1), 86-96.

KOEPF, W. & BEN.-ISRAEL, A. (1993) Integration mit Derive. *Didaktik der Mathematik*, **1**, 40-50.

KÖHLER, R. (1998) Computeralgebra-Systeme im Analysisunterricht. Dissertation, Universität Kassel.

KOKOL-VOLJC, V. (1999) Integralrechnung - welche Änderung bringt der Einsatz von symbolischen Taschenrechnern im traditionellen Unterricht. In: *Mathematische Bildung und neue Technologien* (Hg. von G. e. a. Kadunz). B.G. Teubner, Stuttgart/Leipzig.

KÖRNER, H. (1992) Neue Bildungsziele durch den Computer? In: *Wie viel Termumformungen braucht der Mensch?* (Hg. von H. Hischer). Franzbecker, Wolffenbüttel.

KRAPP, A. (1992) Das Interessenkonstrukt. Bestimmungsmerkmale der Interessenhandlung und des individuellen Interesses aus der Sicht einer Person-Gegenstand-Konzeption. In: *Interesse, Lernen, Leistung. Neue Ansätze der pädagogisch-psychologischen Interessenforschung* (Hg. von A. Krapp & M. Prenzel). Aschendorff Verl., Münster.

KRAUTHAUSEN, G. (1993) Zu Grenzen und Möglichkeiten des `Neuen Mediums´ Computer im Mathematikunterricht der Grundschule. In: *Bundestagung für Didaktik der Mathematik* (Hg. von K. P. Müller). Franzbecker, Freiburg (Schweiz).

KROLL, W. (1985) Grund- und Leistungskurs Analysis. Band 1: Differentialrechnung.

KROLL, W. & VAUPEL, J. (1989) *Grund und Leistungskurs Analysis Bd. 2.* Dümmler, Bonn.

KRUMMHEUER, G. & NAUJOK, N. (1999) *Einführung in die interpretative Unterrichtsforschung: theoretische Grundlagen und Beispiele aus der Forschungspraxis.* Leske + Budrich, Opladen.

KULTUSMINISTERIUM DES LANDES NRW (1999) Richtlinien im Fach Mathematik für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen.

KUTZLER, B. (1995) *Mathematik unterrichten mit DERIVE*, New York.

KUYPERS, W. (1979) *Mathematikwerk für Gymnasien. Oberstufe. Analysis I.* Pädagogischer Verlag Schwann, Düsseldorf.

LERMAN, S. (1996) Intersubjectivity in mathematics learning. A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for research in mathematics education*, **27**(2), 133-150.

LOCKE, J. (1690/1959) An Essay Concerning Humane Understanding. Complete and unabriged edition, collated and annoted by A.C. Fraser.

LUHMANN, N. (1990) *Soziologische Aufklärung.* Westdt. Verl. SW, Opladen.

LUHMANN, N. (1997) *Die Gesellschaft der Gesellschaft.* Suhrkamp, Frankfurt a.M.

MAIER, H. & STEINBRING, H. (1998) Begriffsbildung im alltäglichen Mathematikunterricht - Darstellung und Vergleich zweier Theorieansätze zur Analyse von Verstehensprozessen. *Journal für Didaktik der Mathematik*, **19**(4), 292-329.

MATURANA, H.R. (1982) *Erkennen: die Organisation und Verköperung von Wirklichkeit.* Vieweg, Braunschweig.

MATURANA, H.R. (1994) *Was ist Erkennen?* Piper, München.

MATURANA, H.R. & VARELA, F.L. (1987) *Der Baum der Erkenntnis. Die biologischen Wurzeln der Erkenntnis*, Scherz, Bern.

MICHAILIDIS, G. & DE LEEUW, J. (1998) The Gifi System of Descripitive Multivariate Analysis. UCLA Statistics Electronic Publications. http://www.stat.ucla.edu.

MILLAR, R. (1989) Constructive criticisms. *International Journal of Science Education*, **11** (special), 587-596.

NAESS, A. (1968) *Scepticism.* Rotledge & Paul, London.

NÜSE, R., GROEBEN, N., FREITAG, B. & SCHREINER, M. (1991) Über die Erfindungen des Radikalen Konstruktivismus. Deutscher Studien Verlag, Weinheim

PEIRCE, C.S. (1976) *Schriften zum Pragmatismus und Pragmatizismus*, Frankfurt a.M.

PESCHEK, W. (2000) Integralrechnung mit dem TI-92. In: *Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht, 17* (Hg. von W. Herget, H.-G. Weigand & T. Weth). Franzbecker, Wolfenbüttel.

PIAGET, J. (1974) *Biologie und Erkenntnis.* Fischer, Frankfurt a. M.

PIAGET, J. (1977a) *The development of thought: Equlibration of cognitive structure.* Viking Press, New York.

PIAGET, J. (1977b) *Recherches sur l´abstraction réfléchissante*, Paris.

PIAGET, J. (1998) Der Aufbau der Wirklichkeit beim Kinde. In: *Gesammelte Werke Bd. 2* (Hg. von J. Piaget), Stuttgart.

PLATON. (1988) Theaitetos. In: *Sämtliche Dialoge* (Hg. von O. Gigon), Zürich-München.
PUTNAM, H. (2000) *Vernunft, Wahrheit und Geschichte*. Suhrkamp, Frankfurt a.M.
REICH, K. (1996) *Systemisch-konstruktivistische Pädagogik. Einführung in Grundlagen einer interaktionistisch-konstruktivistischen Pädagogik*. Luchterhand, Neuwied.
REICHEL, H.-C. (1995) *Computereinsatz im Mathematikunterricht*, BI, Zürich.
REICHEL, H.-C. (1974) Zur Didaktik der Integralrechnung für höhere Schulen. *Didaktik der Mathematik,* **3,** 167-188.
REINMANN-ROTHMEIER, G. & MANDL, H. (1998) Lernen mit
Multimedia in der Schule. In: *Lernort Multimedia*, *6* (Hg. von H. Kubicek). Jahrbuch Telekommunikation und Gesellschaft, Heidelberg.
ROTH, G. (1991) Erkenntnis und Realität: Das reale Gehirn und seine Wirklichkeit. In: *Der Diskurs des Radikalen Konstruktivismus* (Hg. von S. J. Schmidt), Frankfurt a.M.
SCHANDA, F. (1995) *Computer-Lernprogramme*. Beltz, Weinheim & Basel.
SCHEUERMANN, H. (1998) *Computereinsatz im anwendungsorientierten Analysisunterricht*, Hildesheim.
SCHIEFELE, U., KRAPP, A. & SCHREYER, I. (1993) Metaanalyse des Zusammenhangs von Interesse und schulischer Leistung. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, **25**(2), 120-148.
SCHMIDT, G. (1988) Computer im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht*, **34**(4).
SCHMIDT, S.J. (1994) *Der Diskurs des Radikalen Konstruktivismus*. Suhrkamp, Frankfurt a.M.
SCHMIEDINGER, E. (1995) Geschlecht und informationstechnische Grundausbildung. Internationale Vergleichsstudie. *Österreichische Pädagogische Zeitschrift*, **145**(1), 2-8.
SCHUBRING, H. (1978) *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Klett-Cotta, Stuttgart.
SCHWANK, I. (1994) Zur Analyse kognitiver Mechanismen mathematischer Begriffsbildung unter geschlechtsspezifischem Aspekt. *ZDM*, **26**(2), 31-40.
SCHWANK, I. (1996) Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihre Anwendung. *ZDM*, **28**(6), 168-183.
SCHWANK, I. (1999) On Predicative versus Functional Cognitive Structures. In: *European Research in Mathematics Education*, *II*, Osnabrück. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
SEMIK. Systematische Einbeziehung von Medien, Informations- und Kommunikations-technologien in Lehr- und Lernprozesse (BLK-Programm), http://www.semik.de.
SIEBERT, H. (1999) *Pädagogischer Konstruktivismus. Eine Bilanz der Konstruktivismusdiskussion für die Bildungspraxis*, Neuwied.
SIERPINSKA, A. (1992) On understanding the notion of function. *MAA Notes*, **25**, 25-58.
SJUTS, J. (1999) Mathematik als Wissensrepräsentation -Theoretische Einordnung, konzeptionelle Abgrenzung und interpretative Auswertung eines kognitiven- und konstruktivismus-geleiteten Mathematikunterrichts.
STEGMÜLLER, W. (1954) *Metaphysik, Wissenschaft, Skepsis*. Humboldt, Frankfurt a.M.
STEINBRING, H. (1990) Probleme der Entwicklung mathematischen Wissens im Unterricht - an einer Analysis-Stunde betrachtet. *Der Mathematikunterricht*, **3**, 4-28.
STEINBRING, H. (1993) Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht - Eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse. *Journal für Didaktik der Mathematik*, **14**(2), 113-145.
STEINBRING, H. (2000) Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Didaktik der Mathematik*, **21**(1), 28-49.
STRUBE, G.E.A. (1996) *Wörterbuch der Kognitionswissenschaft*. Klett-Cotta, Stuttgart.
TERHART, E. (1999a) *Konstruktivismus und Unterricht. Eine Auseinandersetzung mit theoretischen Hintergründen, Ausprägungsformen und Problemen konstruktivistischer Didaktik*. Kettler, Soest.
TERHART, E. (1999b) Konstruktivismus und Unterricht. Gibt einen neuen Ansatz in der Allgemeinen Didaktik? *Zeitschrift für Pädagogik*, **45**(5), 629-647.
TIETZE, U.P., KLIKA, M. & WOLPERS, H. (2000) *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd1: Fachdidaktische Grundfragen*, Braunschweig.
TOULMIN, S. (1994) *Kosmopolis. Die unerkannten Aufgaben der Moderne*. Scriptor, Kronberg.

VAN DER WAERDEN, B.L. (1954) Denken ohne Sprache. In: *Thinking and Speaking* (Hg. von G. Révész), Amsterdam.

VICO, G.-B. (1858) De antiquissima Italorum sapientia. Fink, München.

VOLLRATH, H.-J. (1984) *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Klett, Stuttgart.

VOM HOFE, R. (1995) *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akad. Verl. Heidelberg.

VON FOERSTER, H. (1985) *Sicht und Einsicht. Versuche zu einer operativen Erkenntnistheorie*, Braunschweig/Wiesbaden.

VON FOERSTER, H. (1992) Entdecken oder Erfinden. Wie lässt sich das Verstehen verstehen? In: *Einführung in den Konstruktivismus* (Hg. von H. von Foerster), Frankfurt a. M.

VON FOERSTER, H. (1998) *Einführung in den Konstruktivismus*. Piper, München.

VON GLASERSFELD, E. (1985) Reconstructing the concept of knowledge. *Archives de psychologie*, **13**, 91-101.

VON GLASERSFELD, E. (1989) Cognition, construction of knowledge and teaching. *Synthese*, **80**, 121-140.

VON GLASERSFELD, E. (1991) *Radical constructivism in Mathematics Education*. Kluwer, Dordrecht.

VON GLASERSFELD, E. (1995) Aspekte einer konstruktivistischen Didaktik. LSW, Soest.

VON GLASERSFELD, E. (1998) *Radikaler Konstruktivismus*. Suhrkamp, Frankfurt a.M.

VON GLASERSFELD, E. (1999) Konstruktivismus und Unterricht. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*(4), 499-506.

VYGOTSKY, L.S. (1981) The genesis of higher mental functions. In: *The concept of activity in soviet psychology* (Hg. von J. V. Wertsch). Sharpe, Armonk, NY.

WACKER, K.H. (1986) Das Wachstum des Menschen. Universität zu Köln, Köln.

WAGENSCHEIN, M. (1970) *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken*. Klett, Stuttgart.

WATZLAWICK, P. (1981) *Die erfundene Wirklichkeit*. Piper, München.

WATZLAWICK, P. & KRIEG, P. (1991) *Das Auge des Betrachters. Beiträge zum Konstruktivismus*. Piper, München.

WEINERT, F. & MANDL, H. (1997) *Psychologie der Erwachsenenbildung*, Göttingen.

WINTER, H. (1989) *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihrer Bedeutung für die Pädagogik*. Vieweg, Braunschweig.

WITTENBERG, A.I. (1963) *Bildung und Mathematik*. Klett, Stuttgart.

WITTMANN, E. (1995) *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg, Braunschweig.

WOLFF, D. (1994) Der Konstruktivismus: Ein neues Paradigma in der Fremdsprachendidaktik? *Die neueren Sprachen*, **93**, 407-429.

ZIEGENBALG, J. (1984) Computer im Mathematik-Unterricht. *Mathematik lehren*, **7**.